UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES DHAR MAHRAZ FES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Prs: ECH-CHAOUI . M / MEKNASSI.F

SMP/SMC/SMA/SMI

ELECTRICITE I

Partie I : -Compléments de Mathématiques
-Electrostatique du vide

UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES DHAR MAHRAZ FES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Prs: ECH-CHAOUI . M / MEKNASSI.F

Sommaire

UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH **Prs: ECH-CHAOUI . M / MEKNASSI.F**
FACULTE DES SCIENCES DHAR MAHRAZ FES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

ELECTRICITE 1
(SMP/SMC/SMA/SMI)

Compléments de mathématiques

I) Champs de scalaires et de vecteurs

1) **Champ de scalaires** (Champ scalaire)

Si on peut associer à chaque point M (x,y,z) d'un domaine de l'espace une **grandeur scalaire U(x,y,z),** fonction de coordonnées, on obtient ainsi un champ scalaire de la grandeur scalaire U.

Les surfaces imaginaires passant par tous les points pour lesquels **U= cte**, sont des **surfaces de niveau**.

Des exemples de champs scalaires : champ de températures (surfaces isothermes, T=cte), de pressions (isobares, P=cte), de potentiels électriques (surfaces équipotentielles, V=cte).

2) **Champ de vecteurs** (champ vectoriel).

Si on peut associer à chaque point M (x,y,z) d'un domaine de l'espace une **grandeur vectorielle V(x,y,z),** fonction de coordonnées, on obtient ainsi un champ vectoriel.

Propriétés :Un **champ uniforme** est un champ de vecteurs , tous égaux quelque soit le point M (x,y,z) considéré.

Une **ligne de forces** d'un champ de vecteurs est une courbe dans l'espace telle qu'en chaque point la courbe soit tangente au vecteur V qui définit le champ.

L'équation d'une ligne de forces est définie par la résolution du système d'équations **V ^ dM = 0**, où dM est le vecteur déplacement élémentaire dont les composantes en coordonnées cartésiennes sont dx, dy et dz. L'ensemble des lignes de forces, s'appuyant contre une ligne fermée constitue un tube de forces.

Des exemples de champ vectoriel :

Le champ de pesanteur (P=mg), champ électrique E, champ magnétique B. Le vecteur champ électrique entre les plaques d'un condensateur est un champ uniforme.

II) Rappels de quelques résultats de l'algèbre de vecteurs.

1) **Produits scalaire et vectoriel.**

Soient deux vecteurs A et B, tels que $A = A_x i + A_y j + A_z k$ et $B = B_x i + B_y j + B_z k$.

Le produit **scalaire** de A et B est $A.B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

Le produit **vectoriel** de A et B est :

$A \wedge B = (A_y B_z - A_z B_y) i + (A_z B_x - A_x B_z) j + (A_x B_y - A_y B_x) k$

Le produit **mixte** :

$A. (B \wedge C) = (A \wedge B) .C = (C \wedge A).B$ (**scalaire**)

Double produit vectoriel :

$A \wedge (B \wedge C) = (A.C) .B - (A.B) .C$ (**vecteur**)

UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH **Prs: ECH-CHAOUI . M / MEKNASSI.F**
FACULTE DES SCIENCES DHAR MAHRAZ FES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

III) **Opérateurs différentiels**.

Un opérateur différentiel est une quantité mathématique qui sert à effectuer une opération sur un vecteur V (x,y,z) ou sur un scalaire U(x,y,z).En électrostatique nous utiliserons principalement 4 opérateurs :

Gradient (grad)
Divergence (div)
Rotationnel (rot)
Laplacien (Δ)

Ces opérateurs sont définis à partir d'un opérateur différentiel très simple, le NABLA noté . C'est un opérateur vectoriel de composantes :
$\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ et $\partial/\partial z$ (dérivées partielles par rapport à x, y et z).

$$= \partial/\partial x\ \mathbf{i} + \partial/\partial y\ \mathbf{j} + \partial/\partial z\ \mathbf{k}$$

1) Gradient d'une **fonction scalaire**.

a) **Définition** :

Considérons un champ scalaire, la grandeur U (x,y,z) caractérise ce champ et varie de façon continue et supposée dérivable. On définit le gradient de U par :

$$\mathbf{grad\ U(x,y,z) = \quad U = \partial U/\partial x\ i + \partial U/\partial y\ j + \partial U/\partial z\ k\ (\ vecteur)}$$

Supposons qu'on se déplace du point M(x,y,z) en un point très voisin,distant de dM. La fonction U varie alors de dU, telle que :

$$\mathbf{dU = \partial U/\partial x\ dx + \partial U/\partial y\ dy + \partial U/\partial z\ dz} \quad (\ \textbf{différentielle totale de U})$$

-Si le vecteur A est le gradient d'une fonction U, on dit que A dérive d'un potentiel scalaire V défini par : V= -U , soit A = grad U = -grad V

-Circulation (travail) :

La circulation de A = grad U dans un déplacement élémentaire dM est :

dC = A.dM = dU = -dV. Pour un déplacement fini le long d'un arc de courbe AB, la circulation totale sera :

$$C = \int_A^B A.dM = \int_A^B dU = \int_A^B -dV = U_B - U_A = V_A - V_B$$

La circulation est indépendante du chemin suivi. Elle dépend que des valeurs initiale et finale des potentiels en A et en B. La circulation d'un vecteur gradient le long d'une courbe fermée est nulle :
$\oint gradU.dM = \oint dU = 0$

b) **Notion de gradient en coordonnées.**

La différentielle totale de la fonction potentiel V s'écrit E(M) .dM = -dV
Avec E(M) = -grad V(M):

- Coordonnées cartésiénnes.

$V(M) \longrightarrow V(x,y,z) \longrightarrow dV = \partial V/\partial x\ dx + \partial V/\partial y\ dy + \partial V/\partial z\ dz$

$E(M) = E_x\, i + E_y\, j + E_z\, k,$ $dM = dx\, i + dy\, j + dz\, k,$ $\longrightarrow E(M) . dM = E_x\, dx + E_y\, dy + E_z\, dz = -dV$

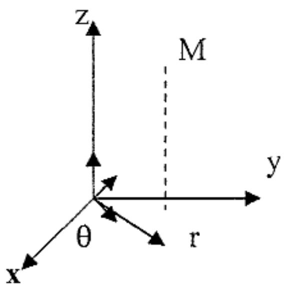
d'où $\mathbf{E_x = -\partial V/\partial x}$, $\mathbf{E_y = -\partial V/\partial y}$ **et** $\mathbf{E_z = -\partial V/\partial z}$

- Coordonnées cylindriques

$V(r,\theta, z) \longrightarrow dV = \partial V/\partial r\ dr + \partial V/\partial\theta\ d\theta + \partial V/\partial z\ dz$

$E(r, \theta, z) = E_r\, u + E_\theta\, p + E_z\, k, \quad dM = dr\, u + r d\theta\, p + dz\, k$

D'où $E(M).dM = E_r.dr + E_\theta\, r d\theta + E_z.dz = -dV(M)$



$\mathbf{E_r = -\partial V/\partial r}$, $\mathbf{E_\theta = -1/r\ \partial V/\partial\theta}$ **et** $\mathbf{E_z = -\partial V/\partial z}$

- Coordonnées polaires

$\mathbf{E_r = -\partial V/\partial r}$, $\mathbf{E_\theta = -1/r\ \partial V/\partial\theta}$

- Coordonnées spériques

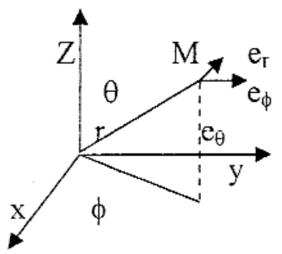
$V(r, \theta, \phi) \longrightarrow dV = \partial V/\partial r\ dr + \partial V/\partial\theta\ d\theta + \partial V/\partial\phi\ d\phi$

$E(r, \theta, \phi) = E_r\, e_r + E_\theta\, e_\theta + E_\phi\, e_\phi,\ dM = dr\, e_r + rd_\theta\, e_\theta + r \sin\theta\, d\phi\, e_\phi,$

d'où $\mathbf{E_r = -\partial V/\partial r}$, $\mathbf{E_\theta = -1/r\ \partial V/\partial\theta}$ **et** $\mathbf{E_z = (-1/r \sin\theta)\ \partial V/\partial\phi}$

c) **Equations des lignes de champ**.

(x,y,z) ------------ $E_x/ dx = E_y/ dy = E_z/ dz$
(r,θ) ------------ $E_r/ dr = 1/r\ E_\theta/ d\theta$
(r, θ,z) ------------ $E_r/ dr = 1/r\ E_\theta/ d\theta = E_z/ dz$
(r,θ,ϕ) ------------ $E_r/ dr = E_\theta/ d\theta = 1/r \sin\theta\ E_\phi/ d\phi$



2) **Divergence d'un champ vectoriel.**
Soit un champ de vecteurs V, V étant fonction des coordonnées, de composantes V_x, V_y et V_z. On définit divergence de V par :

$$\mathbf{div\ V} = \ .V = \partial V_x/\partial x + \partial V_y/\partial y + \partial V_z/\partial z \quad \text{(scalaire)}$$

3) **Rotationnel d'un champ vectoriel**

$$\mathbf{rot\ V} = \ \wedge \mathbf{V} = (\partial V_z/\partial y - \partial V_y/\partial z)\ \mathbf{i} + (\partial V_x/\partial y - \partial V_z/\partial x)\ \mathbf{j} + (\partial V_y/\partial x - \partial V_x/\partial y)\ \mathbf{k}$$

UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH **Prs: ECH-CHAOUI . M / MEKNASSI.F**
FACULTE DES SCIENCES DHAR MAHRAZ FES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

4) **Laplacien** **(scalire ou vectoriel)**

Le laplacien est un opérateur scalaire ou vectoriel, défini à partir de U ou V , et noté **Δ de composantes** $\partial^2/\partial x^2$, $\partial^2/\partial y^2$, $\partial^2/\partial z^2$

- Laplacien scalaire :
  $\Delta U = \partial^2 U/\partial x^2 + \partial^2 U/\partial y^2 + \partial^2 U/\partial z^2 = \;.\; U$
- Laplacien vectoriel :
  C'est un vecteur à trois composantes : $\Delta V = \Delta_x\, i + \Delta_y j + \Delta_z\, k$

avec
$$\Delta_x = \partial^2 V_x/\partial x^2 + \partial^2 V_x/\partial y^2 + \partial^2 V_x/\partial z^2$$
$$\Delta_y = \partial^2 V_y/\partial x^2 + \partial^2 V_y/\partial y^2 + \partial^2 V_y/\partial z^2$$
$$\Delta_z = \partial^2 V_z/\partial x^2 + \partial^2 V_z/\partial y^2 + \partial^2 V_z/\partial z^2$$

5) **Relations entre ces opérateurs**.

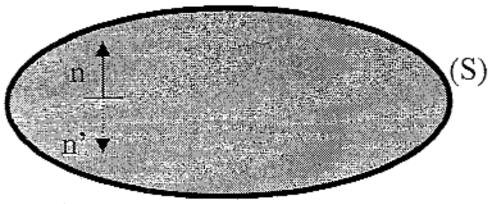
div (grad U) = ΔU
div (rot V) = 0
rot(rot V) = grad (div V) - ΔV
rot (grad U) = 0

grad (A.B) = A grad B + B grad A
div (AB) = B.grad A + A .div B
div (A^B) B.rot A – A.rot B
rot (AB) = A rot B + grad A ^B

IV) Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface.

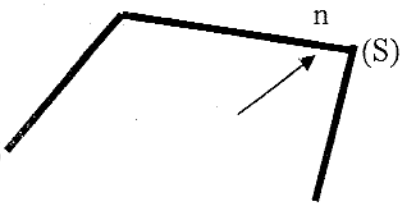
1) **Orientation d'une surface.**

Soit une surface quelconque (S), en tout point M de (S), on peut définir deux vecteurs unitaires n et n' $|n| = |n'| = 1$, dirigés↓↑ et perpendiculaires à (S).
Orienter une surface , consiste à choisir un vecteur unitaire.



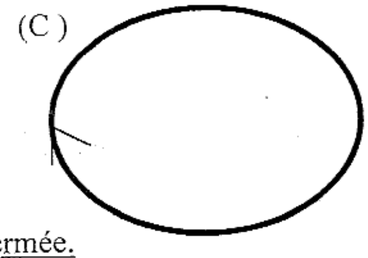
a) Cas d'une surface non fermée.

Soit (S) une surface non fermée limitée par une ligne fermée (C). Pour orienter cette surface, on choisit un parcours positif de (C) et on utilise la règle de tire-bouchon (fermer ou ouvrir une bouteille).



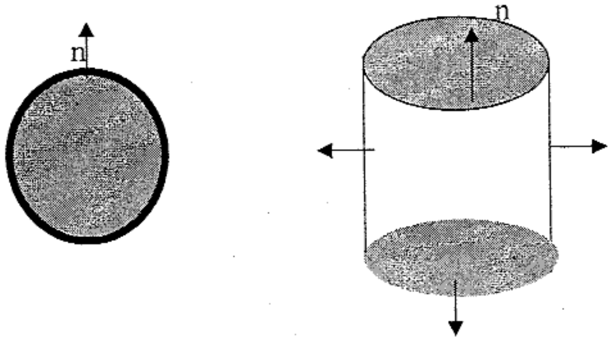
UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES DHAR MAHRAZ FES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Prs: ECH-CHAOUI . M / MEKNASSI.F



b) <u>Cas d'une surface fermée.</u>

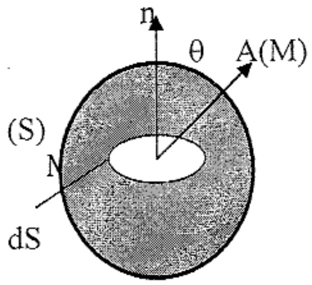
Par convention une surface fermée est toujours orientée de l'intérieur vers l'extérieur.



2) **<u>Flux d'un de vecteur A à travers une surface.</u>**

Soit une région de l'espace ou existe un champ de vecteur A (M). Soit une surface élémentaire quelconque dS (M) autour de point M. On définit le flux du champ de vecteur A(M) à travers dS par :

$$d\phi = A\,(M)\,.\,dS$$
$$= A(M).\,dS\cos\theta$$



On en déduit le flux total de A(M) à travers toute la surface (S) :

$$\boxed{\Phi_{A(M)\,/\,(S)} = \iint_{(S)} A(M).dS}$$

V) <u>Transformations intégrales</u>

1) **<u>Théorème de Green</u>** <u>(Otrogradsky-Gauss)</u>

Soit un champ vectoriel, caractérisé part le vecteur V et considérons une surface fermée S qui enferme un volume v. Le flux du vecteur V à travers la surface fermée S est égale à l'intégrale triple de sa divergence étendue du volume v :

$$\iint_{(S)} V.dS = \iiint div V dv$$

2) **Théorème de Stokes**.

Considérons toujours un champ de vecteurs et soit (C) une courbe fermée, limitant la surface (S) , s'appuyant contre cette courbe.

La circulation du vecteur V le long de la courbe fermée (C) est égale au flux de rot V à travers (S) limitée par (C) :

$$\oint_{(C)} V.dM = \iint_{(S)} rot V.dS$$

VI) **Angle solide**.

Considérons une surface (S), on se propose de déterminer l'angle solide sous lequel d'un point O on voit cette surface .

Soit un point O situé à une distance de dS, très grande par rapport aux dimensions de dS (r >> dS). Le cône de sommet O et s'appuyant sur le contour (C) matérialise l'angle solide élémentaire d Ω .

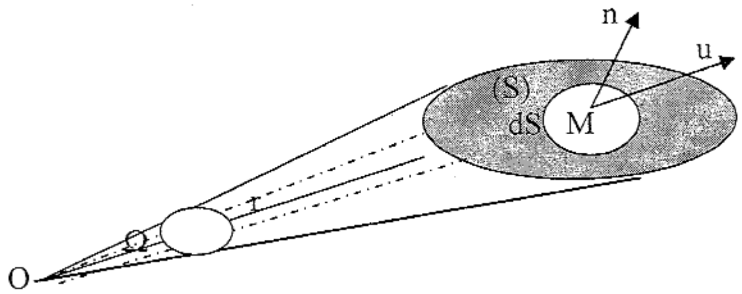
On appelle angle solide sous lequel de O on voit la surface élémentaire dS :

$$d\Omega = u.dS/ r^2$$

On en déduit l'angle solide totale, sous lequel , de O on voit toute la sdurface (S) :

$$\Omega = \int_{(S)} d\Omega = \iint_{(S)} u.dS/ r^2$$

L'angle solide est une quantité algébrique, qui s'exprime en stéradian (Sr).



UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES DHAR MAHRAZ FES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Prs: ECH-CHAOUI . M / MEKNASSI.F

Electrostatique du vide

Sommaire

2) Calcul du potentiel électrostatique.
   a. Cas de plusieurs charges ponctuelles.
   b. Cas des charges continues (linéiques, surfaciques, volumiques)
   c. Cas général.
3) Surfaces équipotentielles et lignes de champ.
4) Différence de potentiels entre deux points.
5) travail électrique.

V) Théorème de Gauss.

1) Flux envoyé par une charge ponctuelle à travers un élément de surface dS.
2) Flux envoyé par une charge ponctuelle à travers une surface fermée.
   a) La charge est à l'intérieur de la surface.
   b) La charge est à l'extérieur de la surface.
   c) Cas général.
3) Exemple.

VI) Equations locales relatives aux champ et potentiel électrostatiques.

1) Equations relatives au vecteur champ.
2) Equations relatives au potentiel.

VII) Conditions de passage du vecteur champ et potentiel au voisinage d'une surface superficielle.

VIII) Le dipôle électrique.

1) définition.
2) Calcul du potentiel.
3) Calcul du vecteur champ.
4) Positions principales de Gauss.
5) Surfaces et lignes de champ.

UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES DHAR MAHRAZ FES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Prs: ECH-CHAOUI . M / MEKNASSI.F

ELECTRICITE 1

(SMP/SMC/SMA/SMI)

Electrostatique du vide

Nous étudierons dans ce chapitre que des phénomènes électrostatiques concernant des charges électriques dont la vitesse est nulle, et supposées placées dans le vide. Le milieu vide (ou l'air) est caractérisé par sa permittivité diélectrique ε_o.

I) Phénomènes d'électrisation.

1) Electrisation par frottement.

Certaines substances, par exemple verre frotté à l'aide d'un morceau de drap , et ébonite frotté à l'aide d'une fourrure, ont la propriété d'attirer des corps légers. On dit alors qu'ils sont **électrisés** ou **chargés**, et ce phénomène est appelé **électricité**. L'électrisation apparaît donc comme un transfert (déplacement, écoulement) d'électrons qui peut se faire d'un corps à l'autre.

2) Electrisation par contact.

Si nous mettons en contact une baguette A (électrisée) avec une baguette B (non électrisée) nous constatons après séparation, que B possède à son tour la propriété d'attirer des corps légers. On dit alors qu'ils sont **électrisés par contact**.

Ce mode d'électrisation ne peut se faire q'avec des corps **conducteurs**.

3) Electrisation par influence.

Si l'on approche un corps **conducteur électrisé** A d'un autre **conducteur neutre** B (dont la somme algébriques des charges est nulle). On suppose que les deux conducteurs sont **isolés** (dont la charge totale, de chacun, reste constante dans

l'espace). On constate que B s'électrise, même s'il n' y a pas contact. On dit que B s'est électrisée **par influence**.

4) Conducteur et isolant.

Il existe d'autres modes d'électrisation comme par exemple : Piézoélectricité , pyroélectricité , électrisation par irradiation, ….etc. D'après les expériences précédentes, on montre qu'il existe deux types d'électricité : positive et négative. Deux charges de mêmes signes se repoussent et de signes opposés s'attirent.

a) Conducteur.

Une charge déposée sur une région d'un conducteur, se répartie aussitôt sur toute sa surface. Un conducteur laisse passer les charges électriques : c'est un réservoir de charges **libres.**

Exemples de corps conducteurs : Tous les métaux (Fer, Cuivre, Or,…), le corps humain, les solutions électrolysables, …etc.

b) Isolant.

Une charge électrique déposée sur un isolant ne se déplace pas. L'électrisation reste localisée. Les charges d'un isolant sont **liées** (fixes).

Exemples : Le verre, paraffine, résine, caoutchouc, bois, mica, …etc.

II) **Forces électrostatiques (Loi de Coulomb).**

1) définition.

Considérons deux charges ponctuelles q_1 et q_2, placées respectivement en deux points M_1 et M_2 distants de r. Elles exerceront l'une sur l'autre des actions mutuelles (principe de l'action et de la réaction).

Si F_{12} représente l'action de q_1 sur q_2 et F_{21} l'action de q_2 sur q_1. On a dans ce cas $\mathbf{F_{12} = - F_{21}}$. L'expérience montre que les actions F_{12} et F_{21} sont proportionnelles au produit q_1 et q_2 et inversement proportionnelles à la distance au carrée, d'où la loi fondamentale de Coulomb :

$$\boxed{\mathbf{F_{21} = K\,(q_1 . q_2 / r^2)\, u}}$$

Où K est une constante positive ; $K = 1/ 4\pi\varepsilon_o$ et $\varepsilon_o = 1/36\ \pi\ 10^9$

Unités : F en Newton (N), r en mètre (m) et q en coulomb (C).



2) Calcul des forces électrostatiques.

a) Cas de plusieurs charges ponctuelles. (Principe de superposition).

Soit un ensemble de charges électriques ponctuelles q_1, q_2, q_3, ... q_n, placées respectivement aux points O_1, O_2, O_3, ...O_n. Ces charges exerceront sur une charge teste q_o (expérimentale) placée en M, la force :

$$F(M) = F_1(M) + F_2(M) + F_3(M) + \ldots + F_n(M)$$
$$= 1/4\pi\varepsilon_o \,[(q_1.q_o/ r_1^2)\, u_1 + (q_2.q_o/ r_2^2)\, u_2 + (q_3.q_o/ r_3^2)\, u_3 + \ldots\ldots + q_n.q_o/ r_n^2)\, u_n]$$

Soit $$\mathbf{F(M) = 1/4\pi\varepsilon_o \sum_{i=1}^{n} q_i.q_o/r_i^2\, u_i}$$

où $u_i = r_i/r_i$ (vecteur unitaire) et $r_i = O_iM$

b) Cas des charges réparties d'une façon **continue.**

- Distribution des charges sur une courbe (**charges linéiques**)

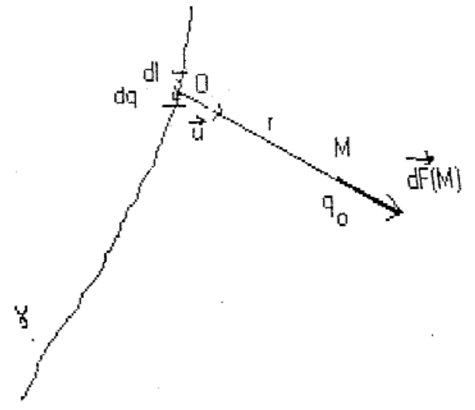
On dit qu'une courbe (γ) est chargée d'une distribution continue de charges, lorsque Δl étant un élément de la courbe comprenant le point O et portant la charge Δq, telle que : $\lim_{\to} (\Delta q /\Delta l) = \lambda$ (**densité linéique** de charges en O)

Si l'élément Δl est très petit et porte une uniformément répartie (charge élémentaire), alors on définit (en électricité) la densité linéique par :

$$\mathbf{\lambda = dq / dl}$$ (l' unité est le **C/m)**

Soit en général, une courbe (γ) chargée avec la densité linéique de charges λ , supposée constante et positive). Un **élément de longueur** dl, placé en O et portant la **charge élémentaire** $dq = \lambda\, dl$ qui exerce sur la charge teste q_o , placée en M à la distance r de O, une **force élémentaire** :

$$dF(M) = 1/4\pi\varepsilon_o\, (q_o.dq)/r^2\, u = 1/4\pi\varepsilon_o\, (q_o.\, \lambda\, dl)/r^2\, u$$



On en déduit la force électrostatique totale exercée par toute la courbe sur q_o en M :

$$\mathbf{F(M) = q_o / 4\pi\varepsilon_o \int \lambda \, dl / r^2 \; u}$$

- <u>Distribution superficielle de charges</u> (**charges surfaciques**).

On dit qu'une surface (S) est chargée superficiellement lorsque ΔS étant un élément de surface entourant O et contenant la charge Δq, telle que :

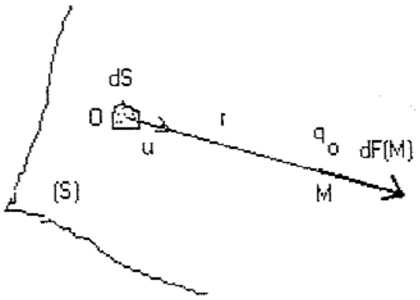
$\lim (\Delta q / \Delta S) = \sigma$ (**densité superficielle** de charges en O)

Si ΔS est très petite et Δq est répartie uniformément on a :

$$\boxed{\sigma = dq / dS} \qquad \sigma \; (C/m^2)$$

On considère une surface (S) chargée avec la densité superficielle σ, supposée constante et positive. Une surface élémentaire dS entourant O et contenant une charge élémentaire $dq = \sigma \, dS$, exerce sur q_o en M une force électrostatique élémentaire :

$$dF(M) = 1/4\pi\varepsilon_o \, (q_o.dq)/r^2 \; u = 1/4\pi\varepsilon_o \, (q_o. \sigma \, dS)/r^2 \; u$$



On en déduit la force électrostatique totale exercée par toute la surface (S) en M :

$$\mathbf{F(M) = (1/ 4\,\pi\varepsilon_o)\, q_o \iint \sigma\, dS/r^2\; u}$$

- <u>Distribution volumique des charges</u> (**charges volumiques**).

On dit q'un volume V est chargé volumiquement si ΔV étant un élément de volume entourant O et contenant la charge Δq, tel que :

lim $(\Delta q / \Delta V) = \rho$ (**densité volumique** de charges en O)

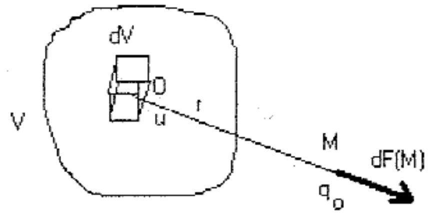
Si Δq est très petit et ΔV est répartie uniformèment, on a :

$$\boxed{\rho = dq / dV} \qquad \rho\ (C/m^3)$$

Soit un volume V chargé avec la densité volumique de charges ρ, supposée constante et positive. Un volume élémentaire dV , entourant O et contenant la charge élémentaire $dq = \rho\, dV$, exerce sur une charge teste q_o placée en M, une force électrostatique élémentaire :

$dF(M) = 1/4\pi\varepsilon_o\, (q_o.dq)/r^2\; u = 1/4\pi\varepsilon_o\, (q_o.\ \rho\, dV)/r^2\; u$, On en déduit la force électrostatique totale exercée par tout le volume sur q_o en M :

$$\mathbf{F(M) = (1/ 4\,\pi\varepsilon_o)\, q_o \iiint \rho\, dV / r^2\; u}$$



III) Vecteur champ électrostatique dans le vide

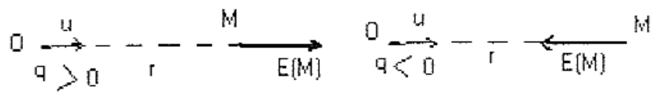
1) Notion de champ électrostatique.

a) Définition.

Considérons un corps chargé (C) à proximité du quel, on place une charge teste q_o positive. Cette charge sera soumise à une force électrostatique F(M). Si on remplace la charge q_o par une charge kq_o (k est un entier), cette charge sera soumise à une force kF(M). On définit alors un vecteur champ électrostatique E(M), tel que : $E(M) = F(M) / q_o = kF(M) / kq_o$

$F(M) = (1 / 4\pi\varepsilon_o)\, q.q_o / r^2\, u$, alors on en déduit :

$$\mathbf{E(M) = F(M) / q_o = (1 / 4\pi\varepsilon_o)\, q / r^2\, u}$$



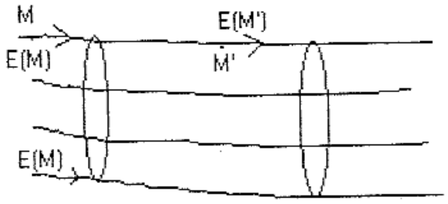
Le vecteur champ E(M) est dirigé vers la charge si celle-ci est négative, et s'éloigne de la charge si elle est positive. On dit que le vecteur champ électrostatique crée par une charge ponctuelle est un **vecteur radial** (suivant un rayon).

b) Propriétés.

-le champ électrostatique est, au sens mathématique du terme, un **champ de vecteurs**.

-On appelle **ligne de champ** une courbe dans l'espace telle que, en chacun de ses points, le vecteur E soit **tangent** à la courbe. La ligne de champ est orientée dans le sens du champ.

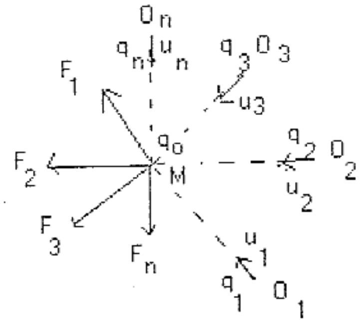
-On appelle **tube de champ** la surface formée par l'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur une courbe fermée.



2) Champ électrostatique E dû à plusieurs charges ponctuelles.

Soit un ensemble de charges ponctuelles q_1, q_2, q_3, ….q_n , placées respectivement aux O_1, O_2, O_3, …..O_n. on veut calculer le vecteur champ électrostatique crée en M. On place en M une charge teste q_o positive. Les forces électrostatiques que ces charges exerceront sur q_o se composent vectoriellement :

$$F(M) = \sum_{i=1}^{n} F_i(M)$$



Le champ électrostatique total E(M) sera donné par :

$$E(M) = F(M) / q_o = \sum_{i=1}^{n} F_i(M) / q_o = \sum_{i=1}^{n} E_i(M)$$

$$\mathbf{E(M) = 1/ 4\pi\varepsilon_o \sum_{i=1}^{n} q_i / r_i^2 \ u_i}$$

3) Champ électrostatique crée par des charges continues.

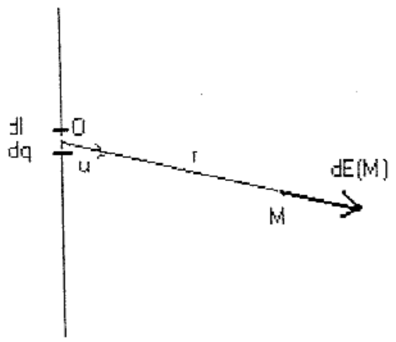
a) Distribution linéique des charges.

Soit une courbe (γ) linéique chargée avec la densité linéique λ, supposée constante et positive. Un élément dl de la courbe (γ) contenant le point O et chargée avec la charge élémentaire dq = λdl, crée en M, à la distance r, le vecteur champ électrostatique élémentaire :

$$dE(M) = 1/4\pi\varepsilon_0 (dq) / r^2\, u = 1/4\pi\varepsilon_0 (\lambda\, dl) / r^2\, u$$

On en déduit le vecteur champ total crée par toute la courbe en M:

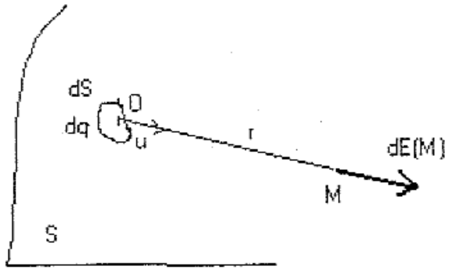
$$\mathbf{E(M) = \lambda / 4\pi\varepsilon_0 \int dl / r^2\, u} \qquad (\lambda \text{ est constante})$$



b) Distribution superficielle de charges.

On considère une surface (S) chargée avec la densité superficielle σ, supposée constante et positive. Une surface élémentaire dS entourant O et contenant une charge élémentaire dq = σ dS, crée en M un vecteur champ électrostatique élémentaire :

$$dE(M) = 1/4\pi\varepsilon_0 (dq) / r^2\, u = 1/4\pi\varepsilon_0 (\sigma\, dS) / r^2\, u$$



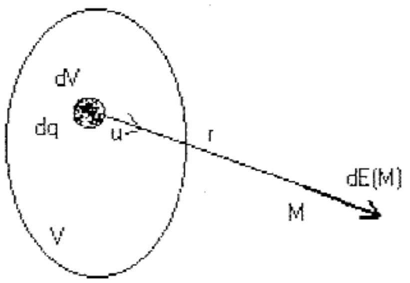
On en déduit la force électrostatique totale exercée par toute la surface (S) en M :

$$\mathbf{E(M) = (\sigma / 4\pi\varepsilon_o) \iint dS / r^2\, u}$$

C) Distribution volumique de charges.

On considère un volume V chargé avec la densité volumique ρ, supposée constante et positive. Un volume élémentaire dV entourant O et contenant une charge élémentaire dq = ρ dV, crée en M un vecteur champ électrostatique élémentaire :

$$dE(M) = 1/4\pi\varepsilon_o (dq) / r^2\, u = 1/4\pi\varepsilon_o (\rho\, dV) / r^2\, u$$

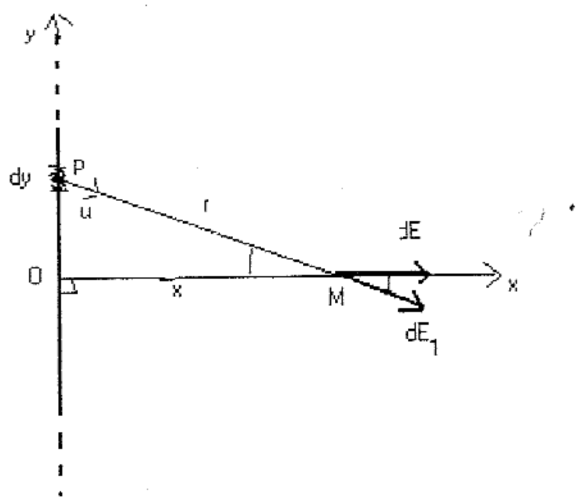


On en déduit la force électrostatique totale exercée par toute la surface (S) en M :

$$\mathbf{E(M) = (\rho / 4\pi\varepsilon_o) \iiint dV / r^2\, u}$$

4) **Exemple de calcul de E**.

On considère un fil électrique infini, chargé avec la densité linéique λ, supposée constante et positive. On se propose de calculer le vecteur champ électrostatique E(M) en M distant de x du fil.



Désignons par O, la projection orthogonale de M sur le fil. On considère un élément infiniment petit de longueur dl = dy, qui contient le point P et porte la charge élémentaire dq = λ dy. Cet élément crée en M un vecteur champ électrostatique $dE_1(M) = (1/ 4\pi\varepsilon_o).\ \lambda\ dy / r^2\ u$.

Par raison de symétrie /Ox, le vecteur champ total E(M) sera porté par l'axe Ox, donc la composante la plus intéressante de dE_1 sera la projection /Ox : $dE(M) = dE_1(M).\cos\alpha$.

On a OP = y, OM =x, PM = r , u = r/r, et (OM,MP) = α. En plus lorsque P varie , r, y et α varieront, par contre x reste fixe. Soit le module de de dE(M) , $dE(M) = (1/ 4\pi\varepsilon_o).\ (\lambda\ dy / r^2).\cos\alpha$, exprimons r et y en fonction de α : On a $\mathrm{tg}\ \alpha = y / x$ et $dy = x.\ d\alpha/ \cos^2\alpha$ et $r = x/\cos\alpha$.

Soit $dE(M) = (1/ 4\pi\varepsilon_o).\ (\lambda\ x.\ d\alpha/ \cos^2\alpha)\cos^2\alpha/ x^2.\cos\alpha = (\lambda / 4\pi\varepsilon_o) / x.\ \cos\alpha.\ d\alpha$

Soit le champ total $E(M) = (\lambda / 4\pi\varepsilon_o) / x\ \int\cos\alpha.d\alpha = (\lambda / 4\pi\varepsilon_o) / x\ [\sin\alpha] =$

$\mathbf{2\lambda / 4\pi\varepsilon_o}$, d'où le vecteur champ électrostatique créé en M par le fil est :

IV) **Le potentiel électrostatique**

Le vecteur champ électrostatique E (M) défini précédemment est une grandeur vectorielle. Il est souvent intéressant de lui substituer une grandeur scalaire, le potentiel électrostatique scalaire V que nous allons définir .

1) <u>Définition</u>

a) <u>Potentiel produit par une charge ponctuelle</u>

Soit une charge ponctuelle q placée en O, crée en M un vecteur champ électrostatique $E(M) = (1 / 4\pi\varepsilon_o).q / r^2\, u$, la circulation élémentaire de ce vecteur est égale à : $dC = E(M) . dM = E(r) .dr = - d(q / 4\pi\varepsilon_o r)$ c'est une différentielle totale exacte, donc le vecteur champ électrostatique E(M) dérive d'un potentiel scalaire V tel que : $\mathbf{V(M) = q / 4\pi\varepsilon_o r + cte}$, donc le potentiel électrostatique V(M) est défini à une constante prés. L'expression la plus simple de V est obtenue en choisissant la constante nulle, ceci revient à prendre le potentiel à l'infini nul, c.à.d en un point très éloigné de toutes les charges qui créent le champ (cas des fonctions coulombiennes : $V(M) = f(1 / r^n)$). Si le système étudié comporte des charges à l'infini, il faut calculer la constante (selon des conditions initiales ou par hypothèse). Donc l'expression du potentiel produit par une charge ponctuelle q en M est :

$\mathbf{V(M) = q / 4\pi\varepsilon_o r}$.

c) <u>Potentiel produit par plusieurs charges ponctuelles.</u>

Soit un ensemble de charges électriques ponctuelles $q_1, q_2, q_3, \ldots q_n$, placées respectivement aux points $O_1, O_2, O_3, \ldots O_n$. Ces charges créent en M le vecteur champ électrostatique : $E(M) = \sum E_i(M)$, dans ce cas la circulation élémentaire en M, pour un déplacement élémentaire dr est : $dC = E(M).dr = \sum E_i(r).dr = - d[V_i(M)]$ par définition du potentiel élémentaire. En posant $V(M) = V_i (M) + cte$, on définit pour l'ensemble des charges un potentiel V dont l'expression est $\mathbf{V(M) = \sum_{i=1}^{n} q_i / 4\pi\varepsilon_o r_i + cte}$, on convient de choisir $V(M) = 0$ si r_i 0, donc cte = 0, et dans ce cas $\mathbf{V(M) = \sum_{i=1}^{n} q_i / 4\pi\varepsilon_o r_i}$.

Rmarque : E(M) et V(M) sont définis en tous point de l'espace sauf sur charges q_i.

5) Potentiel électrostatique produit par des charges continues.

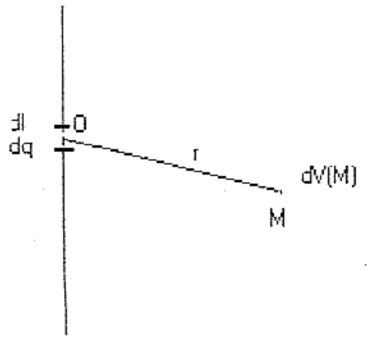
a) Distribution linéique des charges.

Soit une courbe (γ) linéique chargée avec la densité linéique λ, supposée constante et positive. Un élément dl de la courbe (γ) contenant le point O et chargée avec la charge élémentaire dq = λdl, produit en M, à la distance r, le potentiel électrostatique élémentaire :

$$dV(M) = 1/4\pi\varepsilon_o (dq) / r = 1/4\pi\varepsilon_o (\lambda\, dl) / r$$

On en déduit le potentiel total produit par toute la courbe en M :

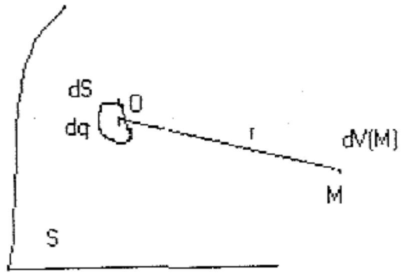
$$\boxed{\mathbf{V(M) = \lambda / 4\pi\varepsilon_o \int dl / r}} \qquad (\lambda \text{ est constante})$$



a) Distribution superficielle de charges.

On considère une surface (S) chargée avec la densité superficielle σ, supposée constante et positive. Une surface élémentaire dS entourant O et contenant une charge élémentaire dq = σ dS, produit en M un potentiel électrostatique élémentaire :

$$dV(M) = 1/4\pi\varepsilon_o (dq) / r = 1/4\pi\varepsilon_o (\sigma\, dS) / r$$



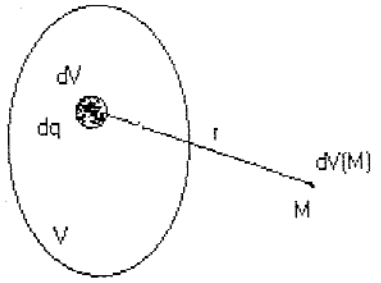
On en déduit la potentiel total produit par toute la surface (S) en M :

$$\mathbf{V(M) = (\sigma / 4\pi\varepsilon_0) \iint dS / r}$$

C) Distribution volumique de charges.

On considère un volume V chargé avec la densité volumique ρ, supposée constante et positive. Un volume élémentaire dV entourant O et contenant une charge élémentaire dq = ρ dV, produit en M un potentiel électrostatique élémentaire :

$$dV(M) = 1/4\pi\varepsilon_0 (dq) / r = 1/4\pi\varepsilon_0 (\rho\, dV) / r$$



On en déduit le potentiel électrostatique totale produit par toute la surface (S) en M :

$$\mathbf{V(M) = (\rho / 4\pi\varepsilon_0) \iiint dV / r}$$

d) Cas général.

Le vecteur champ électrostatique E(M) dérive d'un potentiel scalaire V(M), tel que **E(M) = grad V(M)** , cette expression permet de calculer soit E et d'en déduire V , ou calculer V et d'en déduire E : **E (r) = -dV / dr**

Remarque : l'unité de V est le volt (V), et celle de E est V/m.

6) Surfaces équipotentielles et lignes de champ.

On appelle surface équipotentielle une surface (S) sur laquelle le potentiel électrostatique reste constant (V(M) = cte). Dans ce cas on dV = E(M) . dM = -grad V(M).dM = 0, si le déplacement se fait sur cette surface, le vecteur grad V sera donc perpendiculaire à la surface V = cte , et par conséquent le vecteur E(M) est perpendiculaire à (S). Aussi que les lignes de champ sont perpendiculaire à (S).

7) Différence de potentiels entre deux points.

Entre deux points A et B dont les potentiels sont V_A et V_B, la circulation du vecteur E(M) est : $C = \int_{AB} E(M).dM = \int_{AB} -\text{grad } V.dM = \int_{AB} -dV = V_A - V_B$, donc la circulation de E entre deux points est égale à la différence de potentiels entre ces deux points et ne dépend que des valeurs initiale(départ) et finale (arrivée). La circulation de E est nulle le long d'un circuit fermé. On dit que le vecteur E est à circulation conservative (rot E = 0)

8) Travail

Si on déplace une charge électrique q de A en B, le travail de la force électrostatique F(M) est :

$$\xi = \int_{AB} q\, E(M).dM = q \int_{AB} E(M).dM = -q \int_{AB} \text{grad } V.dM = q\,(V_A - V_B).$$

L'unité du travail est le Joule (J).

V) **Théorème de Gauss.**

C'est un théorème qui permet de calculer le champ électrostatique E (M), d'une façon indirecte et plus rapide que la méthode directe (à partir de la définition du champ), pour des systèmes possédant une symétrie (sphère, cylindre, fil, …etc).

1) Flux envoyé par une charge ponctuelle q à travers une surface élémentaire dS.

Soit $d\Omega$ l'angle solide sous lequel de O on voit la surface élémentaire dS. Le flux du vecteur champ électrostatique E à travers dS est égale à :

$$d\Phi = (1 / 4\pi\varepsilon_o)q\, dS.u / r^2 = (q / 4\pi\varepsilon_o)\, d\Omega,$$

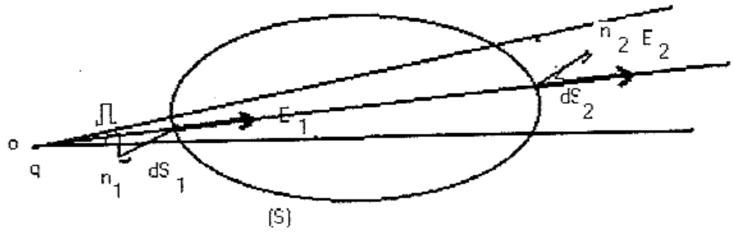
Pour une surface (S) non fermée, limitée par une courbe (C) fermée, on a : $\Phi = q / 4\pi\varepsilon_0 \iint_S d\Omega = (q / \varepsilon_o). (\Omega / 4\pi)$, où Ω est l'angle solide totale sous lequel de O on voit toute la surface (S). Cette expression du flux est la même pour différentes surfaces **non fermées** vues sous le même angle Ω, à partir de O.

Pour le cas d'une **surface fermée**, on aboutit à un résulta simple connue sous le nom de **Théorème de Gauss**.

2) Flux envoyé par une charge ponctuelle q à travers une surface fermée (S).

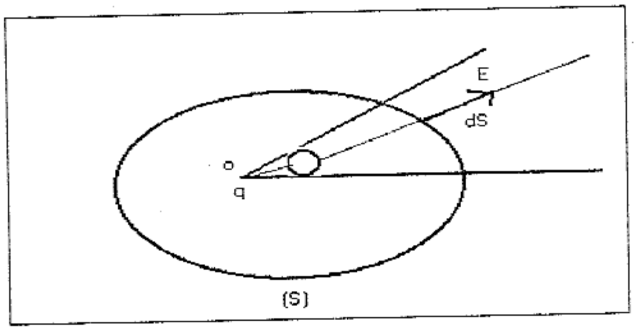
a) La charge q est à l'extérieur de (S)

Soit une surface (S) fermée, on place une charge q en un point O situé à l'extérieur de (S). Soit $d\Omega$ l'angle solide élémentaire qui découpe (S) en deux surfaces élémentaires dS_1 et dS_2, orientées par leurs vecteurs unitaires (normales) n et n'. Soient E_1 et E_2 les vecteurs champ crées par dS_1 et dS_2 , par q. Le flux $d\Phi_{E/dS1}$ est < 0 et $d\Phi'_{E2/dS2} > 0$. En valeurs absolues sont égaux $d\Phi = d\Phi'$ (dS et dS' sont vues sous le même angle $d\Omega$), d'où le flux total sortant de dS_1 et dS_2 est nul : $d\Phi + d\Phi' = 0$.



1. La charge q est à l'intérieur de (S).

$d\Phi_{E/dS} = (q / 4\pi\varepsilon_o).\ d\Omega$, et $\Phi_{E/S} = q / 4\pi\varepsilon_o \iint_S d\Omega = (q / \varepsilon_o).\ (\Omega / 4\pi)$, avec Ω l'angle solide sous lequel de O on voit S, qui est égale à 4π. Soit $\mathbf{\Phi = q / \varepsilon_o}$



c) En général.

Considérons une distribution quelconque de charges(ponctuelle ou continue). Soit S une surface fermée : - Le flux est nul (si les charges sont extérieures à S)

- $\Phi = 1/\ \varepsilon_0 \sum_{i=1}^{n} q_{intérieures}$ (si les charges sont à l'intérieur de S)

d) **Enoncé du théorème de Gauss.**

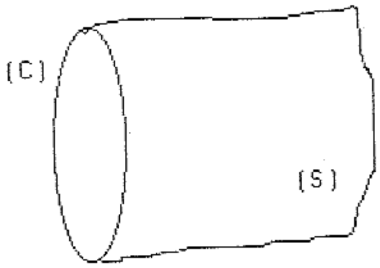
Le flux du vecteur champ E sortant à travers une surface S fermée, est égal au quotient par ε_o de la somme de toutes les charges électriques situées **à l'intérieur** de S.

$$\boldsymbol{\Phi_{E/S} = 1/\ \varepsilon_0 \sum_{i=1}^{n} q_{intérieures}}$$

VI) Equations locales relatives à E et V.

1) Equations relatives à E.

On considère la circulation du vecteur champ E le long d'une courbe fermée (C), limitant une surface (S) : $\int_{(C)}$ E(M) . dM = 0. D'après le théorème de Stokes, on peut écrire $\int_{(C)}$ E(M) . dM = $\iint_{(S)}$ rot E.dS = 0, ce qui entraîne **rot E = 0** (1), le vecteur E est à circulation conservative.



- Equation de Poisson et de Laplace.

On considère un surface fermée (S) et limite un volume V, chargé avec une densité de charges volumiques ρ, d'après le théorème de Gauss, les charges contenues dans V envoient à travers (S) le flux : $\Phi = \iint_{(S)} E.\, dS = 1 / \varepsilon_0 \sum q_{int} = 1 / \varepsilon_0 \iiint \rho\, dV$, or d'après le théorème de Stokes $\Phi = \iint_{(S)} E.\, dS = \iiint divE.dV$, d'où on en déduit **divE = ρ / ε_0** (2), c'est l'équation de **Poisson** relative à E. Si le volume V ne contient pas de charges (ρ = 0), on en obtient l'équation de **Laplace** relative à E : **div E = 0** (3).

2) Equations relatives au potentiel V.

Compte tenue de la relation E(M) = -grad V(M), les relations précédentes deviennent :

divE = div(-grad V) = ΔV = ρ / ε_0, d'où

ΔV - ρ / ε_0 = 0 (4), l'équation de Poisson relative à V.

$\Delta V = 0$ (5), l'équation de Laplace relative à V.

Les équations (1) à (5) sont des relations fondamentales pour le champ E et le potentiel V. Ce sera une autre méthode (indirecte) de calcul de E et V.

VII) Comportement (conditions de passage) de E et V au voisinage d'une surface.

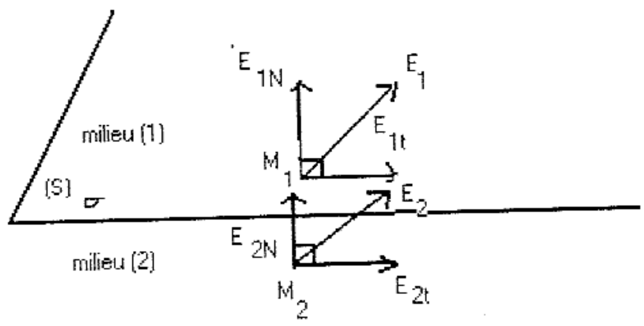
Soit une surface (S), chargée superficiellement avec la densité σ, qui sépare deux milieux (1) et (2). On veut étudier le comportement de E et V au voisinage de (S).

b) Continuité du potentiel.

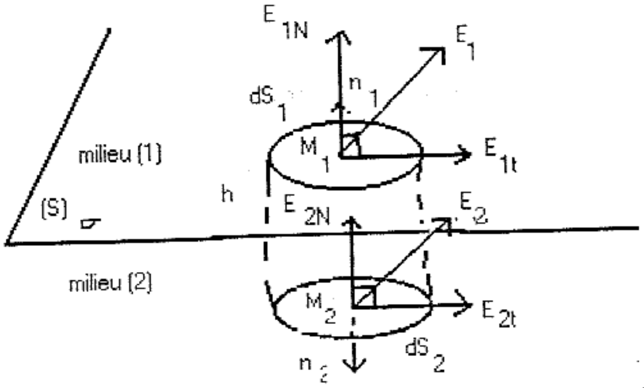
Le potentiel électrostatique V(M) est une fonction partout continue et en particulier au voisinage de (S) : $V(M_1) = V(M_2)$.

c) Discontinuité des composantes normales de E.

Soient $E_1(M_1)$ et $E_2(M_2)$ les vecteurs champ électrostatiques, respectivement , définis en milieu (1) et milieu(2). M_1 et M_2 sont deux points très voisins (proches) de (S). Décomposons E(M) en deux composantes **normale à (S)** $E_N(M)$ et **tangentielle à (S)** $E_t(M)$: Dans ce cas on peut écrire $E_1(M_1) = E_{1N}(M_1) + E_{1t}(M_1)$ et $E_2(M_2) = E_{2N}(M_2) + E_{2t}(M_2)$



Soit un cylindre de hauteur h ,négligeable, fermé par deux surfaces de base dS_1 et dS_2 très proches de (S).

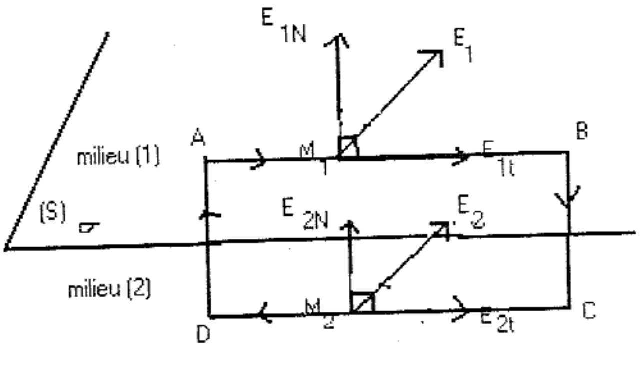


Le flux sortant de ce cylindre est $d\Phi = E(M).dS = E_1(M_1).\ dS_1 + E_2(M_2).dS_2 =$ $(E_{1N}(M_1) + E_{1t}(M_1)).dS_1\ n_1 + (E_{2N}(M_2) + E_{2t}(M_2)).dS_2\ n_2 = E_{1N}(M_1)\ .dS_1\ n_1 +$ $E_{2N}(M_2)\ .dS_2\ n_2 = (E_{1N}(M_1) - E_{2N}(M_2))\ .dS = 1 / \varepsilon_o \sum q_{int} = (\sigma / \varepsilon_o)\ dS$, avec $dS =$ $dS_1 = dS_2$ et sont parallèles à (S). On en déduit $\mathbf{E_{1N}(M_1) - E_{2N}(M_2) = \sigma / \varepsilon_o}$

On dit que les composantes normales de E sont **discontinues** au voisinage d'une surface de séparation (S) **chargée** avec la densité σ .

c) Continuité des composantes tangentielles de E.

Soit un contour fermé ABCD, de forme rectangulaire, dont les côtés AB et CD sont parallèles à (S) et très proches, et les côtés AD et BC sont négligeables.

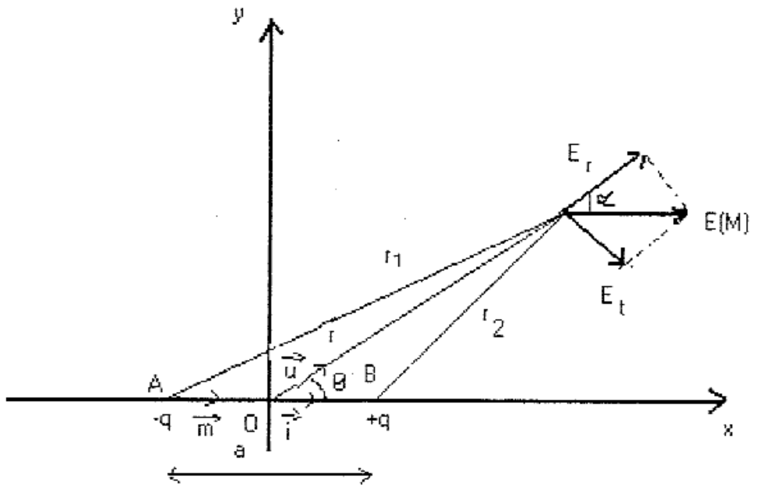


Calculons la circulation de E le long du contour fermé ABCD. Soit $\int_{ABCD} E(M).\ dl = 0 = \int_{ABCD} (E_{1N}(M_1) + E_{1t}(M_1)).AB + (E_{2N}(M_2) + E_{2t}(M_2)).CD =$ $E_{1t}(M_1)\ .AB - E_{2t}(M_2).CD = 0$, or AB = CD d'où $\mathbf{E_{1t}(M_1) = E_{2t}(M_2)}$, on dit que les composantes tangentielles de E sont **continues** au voisinage d'une surface de séparation quelconque (**chargée ou non**).

VII) Le dipôle électrique.

1) Définition.

On appelle dipôle électrique, l'ensemble de deux charges ponctuelles +q et –q placées à une distance a l'une de l'autre. Cette distance a doit être très petite par rapport à la distance r à laquelle on étudie le vecteur champ et le potentiel du dipôle.



On pose : $r = OM$, $r_1 = AM$, $r_2 = BM$, $a = AB$, $(Ox,Oy) = \theta$, $a \ll r$
$u = r / r$

2) Calcul du potentiel produit par la dipôle.

Les deux charges du dipôle produisent en M le potentiel électrostatique :
$V(M) = V_{+q}(M) + V_{-q}(M) = (q / 4\pi\varepsilon_0)\ (1/r_1 - 1/r_2) = (q / 4\pi\varepsilon_0)[(r_2 - r_1) / r_1.r_2]$.

Il y a deux méthodes pour calculer l'expression de ce potentiel :

- La méthode approximative.

On a $a \ll r$, donc r_1 et $r_2 \gg a$, d'où $r_1\, r_2 \approx r^2$ et $r_1 - r_2 = AH \approx a \cos\theta$, d'où le potentiel électrostatique V(M) produit par le dipôle en M sera :

$$\mathbf{V(M) \approx (q / 4\pi\varepsilon_0)\ (a \cos\theta / r^2)}$$

On pose m = q a, si i est le vecteur unitaire de l'axe Ox, on peut écrire m = m i, qui est appelé le vecteur moment électrique du dipôle (vecteur moment dipolaire), dirigé toujours dans le sens de +q vers –q, et s'exprime en C.m. dans ces conditions on peut écrire :

$$\mathbf{V(M) = (1 / 4\pi\varepsilon_0)\ m\ .\ u / r^2}$$

3)Calcul du vecteur champ électrostatique.

On calcule les composantes du vecteur champ électrostatique E(M), crée en M, par le dipôle en coordonnées polaires (r, θ), à partir de l'expression du potentiel V(M) et à l'aide de E(M) = -grad V(M). pour cela on décompose le vecteur E(M) en deux composantes : - une composante radiale E_r (M), dans la direction de r.

- une composante tangentielle $E_t(M)$, normale à E_r

Soit $E(M) = E_r(M) + E_t(M)$, et

$$E_r = - \partial V/\partial r = - \partial /\partial r\, [(1 / 4\pi\varepsilon_o)\, (m \cos\theta / r^2)] = 2\, m \cos\theta / 4\pi\varepsilon_o\, r^3$$

$$E_r =(-1 / r)\, \partial V/\partial\theta = m \sin\theta / 4\pi\varepsilon_o\, r^3$$

Donc le module du vecteur E(M) sera :

$$\mathbf{E(M)} = \sqrt{\mathbf{E_r}^2 + \mathbf{E_t}^2} = \mathbf{m / 4\pi\varepsilon_o\, r^3 \sqrt{4 \cos^2\theta + \sin^2\theta}}$$

N.B: on $\mathrm{tg}\,\alpha = E_t / E_r = ½\, \mathrm{tg}\,\theta$.

4)Positions principales de Gauss.

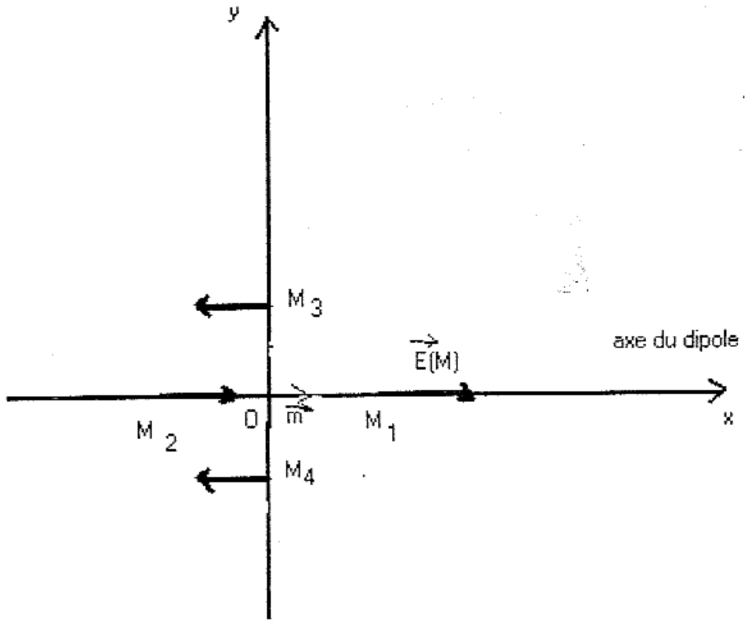
On appelle positions principales de Gauss, les positions de M pour les quelles le vecteur E(M) est parallèle au vecteur moment m. Ou bien des points équidistants de O, tels que $\theta = 0, \pi / 2, \pi$ et $3\pi/2$.

- Positions pour $\theta = 0$ et π :

Elles correspondent à $E_t = 0$ et $E_r = E(M) = 2m / 4\pi\varepsilon_o\, r^3$ pour $\theta = 0$ (M_1), et $E_r = E(M) = - 2m / 4\pi\varepsilon_o\, r^3$ pour $\theta = \pi$ (M_2). Donc on peut écrire vectoriellement: $\mathbf{E(M) =2m / 4\pi\varepsilon_o\, r^3}$

- Positions pour $\theta = 0$ et π :

Elles correspondent à $E_r = 0$ et $E_t = E(M) = m / 4\pi\varepsilon_o\, r^3$ pour $\theta = \pi/2$ (M_3), et $E_t = E(M) = - m / 4\pi\varepsilon_o\, r^3$ pour $\theta = 3\pi/2$ (M_4). Donc on peut écrire vectoriellement: $\mathbf{E(M) =- m / 4\pi\varepsilon_o\, r^3}$



5)Lignes de champ et surfaces équipotentielles du dipôle.

a) Lignes de champ.

Les lignes de champ ont pour équation différentielle en coordonnées polaires : E (M) ^ dM = 0 , soit $r / E_r = r\, d\theta$, on obtient $dr/r = 2(\cos\theta / \sin\theta)\ d\theta$, ou bien $d/dr\,(\ln r) = 2\, d/d\theta\,(\ln \sin\theta)$, soit $\ln r - \ln K = \ln(\sin^2\theta)$, par intégration on aura :

$\mathbf{r = K \sin^2 \theta}$ ou K est une constante >0. Cette équation représente l'équation des lignes de champ du dipôle, en coordonnées polaires d'une famille de courbes de paramètre K.

a) Surfaces équipotentielles.

Les surfaces équipotentielles sont données par V(M) = cte, soit :

$m \cos\theta / 4\pi\varepsilon_0 r^2 = cte$ ou $\mathbf{r^2 = C \cos\theta}$, avec C est une constante >0 si $-\pi/2 < \theta < +\pi/2$, et C <0 si $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$

Les surfaces équipotentielles sont des courbes de révolution autour de l'axe Ox (axe du dipôle).

Les lignes de champ et les surfaces équipotentielles auront l'allure suivant :

UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES DHAR MAHRAZ FES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Prs: ECH-CHAOUI . M / MEKNASSI.F

UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES DHAR MAHRAZ FES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

2009-10

SMP/SMC/SMA/SMI

ELECTRICITE I

Partie II : -Conducteurs en équilibre

-Electrocinétique

UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES DHAR MAHRAZ FES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Prs: ECH-CHAOUI . M / MEKNASSI.F

Sommaire

b) Puissance consommée par récepteur.

VI) Etude des réseaux électriques. (Lois de Kirchoff)

1) Définitions.
2) Lois de Kirchoff.
3) Déterminations des intensités de courant dans un circuit.
4) Théorème de Thevenin.
5) Théorème de Norton.
6) Théorème de superposition.
7) Théorème de Kinelly. (Transformations Triangle $\rightleftarrows$ Etoile)

UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH **Prs: ECH-CHAOUI . M / MEKNASSI.F**
FACULTE DES SCIENCES DHAR MAHRAZ FES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

(SMP/SMC/SMA/SMI)

Conducteurs en équilibre

L'étude de l'électricité consiste à analyser la disposition et les mouvements des charges électriques dans l'espace en fonction des matériaux et des matériels concernés, ainsi que les conséquences que cela entraîne.

1) Définitions.

a) Conducteur.

Les charges électriques positives et négatives, sont attachées aux constituants de la matière, qui sont les protons et les électrons. La charge élémentaire est celle d'un électron : $e = - 1.6\ 10^{-19}$ C..

Un matériau conducteur laisse passer les charges électriques (libres). Celles-ci sont issues du matériau lui-même : donc un conducteur est un **réservoir** de charges **libres**.

b) Isolant.

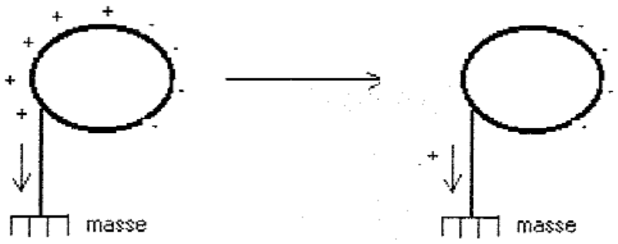
Un matériau solide isolant ne laisse pas passer des charges électriques (liées). S'il est fluide, il ne peut laisser passer que des charges ne provenant pas du matériau lui-même (ex : canon à électrons et gaz rares d'un tube à rayons cathodiques).

Un isolant est donc incapable de fournir des charges libres.

2) Propriétés générales à l'équilibre.

a) Généralités.

- Un conducteur est en **équilibre** électrostatique, lorsque toutes les charges libres sont au repos.
- Un conducteur est **isolé**, si sa charge totale reste constante dans l'espace.
- Un conducteur est **neutre** (de charge nulle) possède tout de même des charges dont la somme algébrique est nulle.
- Un conducteur est chargé (théoriquement) possède un excédent de charges d'un signe donné (+ ou -). En pratique un conducteur est chargé avec des charges positives.
- Un conducteur chargé est relié à la **masse** (sol, terre), ses charges positives sont attirées par cette masse.



b) **Propriétés internes.**

- Le champ électrostatique interne est nul.

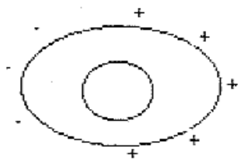
La **force** électrique agissant au niveau de n'importe quelle charge q élémentaire, contenue dans le conducteur (C) doit être **nulle**. D'où le champ électrique interne est nul.

F_i (M) = 0 = q E_i(M) -------- $\mathbf{E_i = 0}$

- Le potentiel électrostatique interne est constant.

- La somme des charges internes est nulle.

Considérons une surface fermée S, entiérement contenue dans le conducteur (C) .
Si $\sum q_i$ est la charge totale interne à (C), ellest donc aussi pour S. Si on applique le théorème de Gauss par rapport à S : $\oiint_S E_i \cdot dS = 1 / \varepsilon_0 \sum q_i = 0$ ----------- $\mathbf{\sum q_i = 0}$. D'où lorsqu'un conducteur est en équilibre, ses charges se trouvent sur sa **surface externe**. S'il est creux, sa surface **intérieure** ne contient pas de charges.

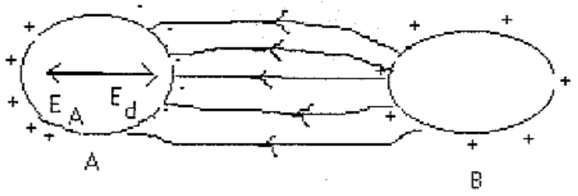


b) **Propriétés externes.**
- La surface d'un conducteur en équilibre est **équipotentielle** (potentiel est constant), et les lignes de champ lui sont normales.
- Le vecteur champ électrostatique au voisinage de la surface d'un conducteur, chargée avec la densité superficielle σ est $\mathbf{E}$ **(M)** = σ / ε_0 **u**.

3) **Système de conducteurs**.

a) **Généralités**.

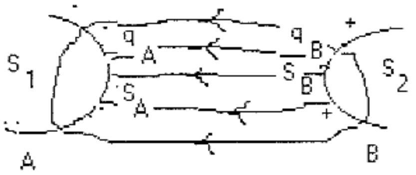
Soit un conducteur A (en équilibre) neutre et isolé, en présence d'un autre conducteur B (en équilibre) isolé et chargé. Le champ électrostatique crée par B va influencer A en dissociant ses charges, et en le rendant déséquilibré ($E_{iA} \neq 0$, $\sum q_i \neq 0$). La migration des charges à l'intérieur de A s'arrêtera lorsque le champ E_d, crée par les charges dissociées s'opposera à E_A pour avoir un champ résultant nul à l'intérieur de A ($E_A + E_d = 0$). D'où le conducteur A retrouvera son équilibre et ses cherges seront de nouveau superficielles.



b) **Eléments correspondants.**

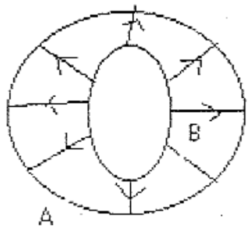
Soit un tube de champ qui découpe sur A une surface S_A et sur B une surface S_B. On ferme ce tube à l'intérieur de chaque conducteur par une poche quelconque (S_1 et S_2). Soient q_A et q_B les charges respectives dans S_A et S_B. On applique le théorème de Gauss à la surface fermée (tube + S_1 + S_2), $\Phi_{E/SGauss} = 1/\varepsilon_o \sum q_i = (q_A + q_B)/\varepsilon_o = 0$, car les champs dans S_1 et S_2 sont nuls et celui dans le tube aussi (E est perpendiculaire à la surface du tube), d'où $\mathbf{q_A = -q_B}$.

Les surfaces en regard découpées par un même tube de champ sur deux conducteurs sont appelées « éléments correspondants ». Elles portent des charges égales en valeur absolue mais de signe contraire.



c) **Phénomènes d'influence.**

Si parmi les lignes de champ qui partent de B, une partie seulement arrive sur A, on parlera **d'influence partielle**. Si la totalité arrive sur A on parlera d'**influence totale**. D'une autre façon, il y a influence totale si le conducteur influencé (A) entoure complètement le conducteur influençant(B).



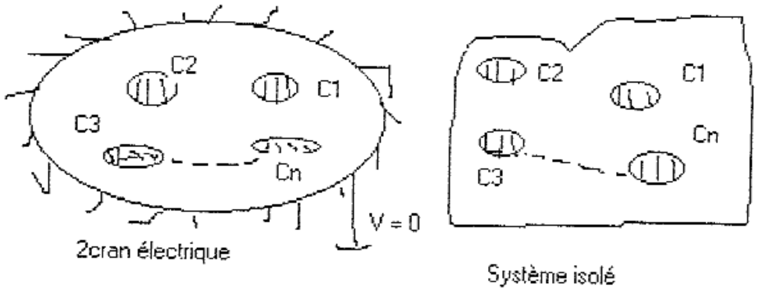
d) **Ecran électrique**.

On appelle écran électrique un conducteur creux ,présentant une certaine cavité, maintenu à un potentiel constant : les champs électrostatiques et les propriétés des charges dans la cavité sont indépendantes des charges extérieures et inversement.

4) Capacités et coefficients d'influence

a) Définition

Considérons un système de n conducteurs portés à des potentiels V_1, V_2, V_3, ...V_n, et portant des charges totales Q_1, Q_2, Q_3, ... Q_n. Supposons que ces conducteurs constituent un système isolé dans tout l'espace et on prend comme zéro du potentiel celui de l'infini, ou bien ils sont enfermés dans un écran électrique et dans ce cas on prend comme zéro du potentiel celui de l'écran.



Dans untel système de conducteurs, la charge électrique totale de chaque conducteur sera une fonction linéaire et homogène de tous les potentiels :

$$\mathbf{Q_i} = \sum_{j=1}^{n} C_i^j V_j \quad \text{soit} \quad Q_1 = \mathbf{C}\, V_1 + C\, V_2 + C\, V_3 + \ldots\ldots + C\, V_n$$

$$Q_2 = C\, V_1 + \mathbf{C}\, V_2 + C\, V_3 + \ldots\ldots + C\, V_n$$
$$Q_3 = C\, V_1 + C\, V_2 + \mathbf{C}\, V_3 + \ldots\ldots + C\, V_n$$

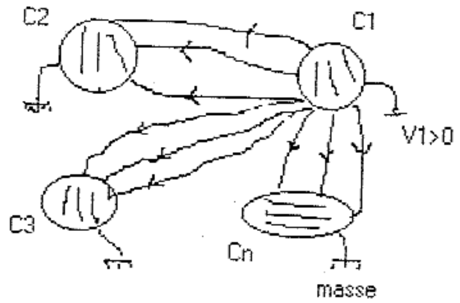
$$Q_n = C\, V_1 + C\, V_2 + C\, V_3 + \ldots\ldots + \mathbf{C}\, V_n$$

Lorsque **i = j** les coefficients C sont appelés **capacités** : par exemple C est la capacité du conducteur 1. Si $i \neq j$ les coefficients C sont appelés coefficients d'influence : exemple C est coefficient d'influence du conducteur 2sur 1.

4) Propriétés

Supposons que le conducteur C_1 est porté à un potentiel $V_1 > 0$, et les autres conducteurs sont reliés à la masse ($V_2 = V_3 = \ldots\ldots = V_n = 0$). Dans ce cas on a

$Q_1 = C\, V_1$, $Q_2 = C\, V_1$, ...$Q_n = C\, V_1$



Le conducteur C_1 est chargé avec une charge $Q_1 > 0$, et en plus $V_1 > 0$ alors C >0, donc en général les capacités C sont toujours positives. D'après les éléments correspondants le conducteur C_2 sera chargé par influence avec une charge $Q_2 < 0$, et avec $V_1 > 0$ on a C <0, d'où les coefficients d'influence C sont négatifs.

$$Q_i \geq \sum_{j=2}^{n} |Qj| \text{ et } C = \sum_{j=1}^{n} |C| \ (j \neq i)$$

5) Condensateurs.

1) Définitions.

Un condensateur est un ensemble de deux conducteurs, dont l'un entoure complètement l'autre. Le conducteur extérieur est l'armature externe, le conducteur intérieur est l'armature interne. Il y a influence totale entre ces deux armatures. Les armatures sont séparées par un milieu diélectrique, de permittivité absolue $\varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_r$, qui peut varier d'un milieu à l'autre.

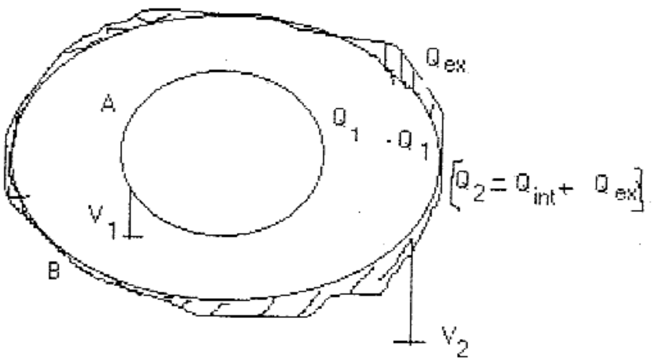
Le vide (ou l'air) est un milieu diélectrique qui est caractérisé par sa permittivité ε_o (ε_r = 1). Pour les autres milieux différents du vide $\varepsilon_r > 1$. [verre ε_r (5.5 à 9), miça (5.6)…ect].

2) Capacité d'un condensateur.

a) Définition.

Soient A et B les deux armatures d'un condensateur quelconque, portées respectivement aux potentiels V_1 et V_2 et leurs charges totales respectives sont Q_1 et Q_2.

Nous pouvons écrire : $Q_1 = C\ V_1 + C\ V_2$ et $Q_2 = C\ V_1 + C\ V_2$



Nous supposons deux hypothèses :

a) L'armature B est reliée au sol (masse) : $\mathbf{V_2 = 0}$

Dans ce cas la charge extérieure de B sera nulle, mais la face intérieure sera chargée par influence totale de $-Q_1$, d'où $\mathbf{Q_2 = - Q_1}$, avec $V_2 = 0$ on a **C = C**

b) Les deux armatures A et B sont reliées par un fil conducteur. $\mathbf{V_1 = V_2}$

Dans ce cas A +B + Fil sera équivalent à un seul conducteur en équilibre (le champ électrique à l'intérieur de la cavité sera nul, ainsi que la charge intérieure $\mathbf{Q_1= 0}$).
Avec $V_1 = V_2$ et $Q_1 = 0$, on a **C = C**

Posons C = C = C = C, dans ce cas ce coefficient C est appelé **Capacité d'un condensateur,** et la charge $\mathbf{Q = Q_1}$ est la **charge du condensateur.**

Donc, $\mathbf{C = Q / (V_1 - V_2)}$ l'unité de C est le farad , **C (F)**

Considérons maintenant la charge extérieure de la face externe de B, soit
$Q_{ex}= Q_1 + Q_2 = C (V_1 - V_2) - C\ V_1 + C\ V_2 = (C\ -C\ )\ V_2$. Donc cette charge ne dépend pas de V_1, mais que de V_2, elle apparaît comme une charge en équilibre d'elle-même, c'est-à-dire elle a même répartition sur un conducteur unique ayant pour surface externe de b et pour capacité propre est Q_2 / V_2 ou (C - C).

b) <u>Exemple de condensateurs.</u>

- Méthode de calcul de C.

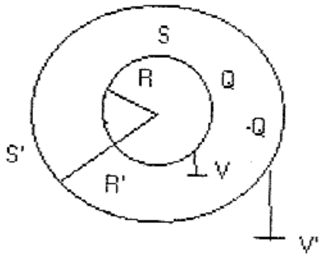
Déterminer la répartition des charges des conducteurs à l'équilibre, et calculer le champ électrostatique crée par ces charges, et en déduire la différence du potentiel entre les armatures. Puis vous calculez le rapport $C = Q / (V_1 - V2$

- Condensateur sphérique.

Les deux armatures sont des sphères S et S' , de même centre o, de rayons respectifs R et R', de charges totales Q et Q' et leurs potentiels V et V'.

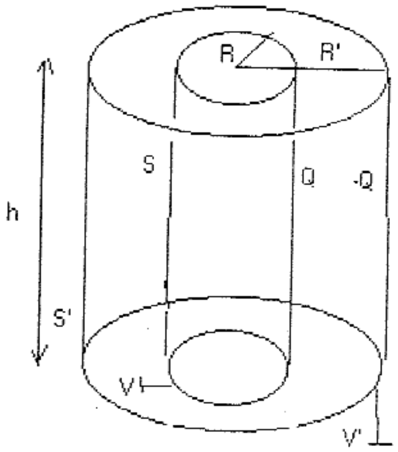
On a le cas simple où les faces en regard des armatures portent des cherges +Q et –Q.
Dans ce cas $E(M) = Q/ 4\pi\varepsilon_0 r^2$, et on en déduit $V\text{-}V' = \int_R^{R'} -dV = \int_R^{R'} E.dr = Q/ 4\pi\varepsilon_0 \int_R^{R'} dr / r^2$
$= Q/ 4\pi\varepsilon_0 (1/R - 1/ R')$, on en déduit $\mathbf{C = 4\pi\varepsilon_0 . R R'/ (R' - R)}$.

Remarque : C dépend que de la géométrie du condensateur. Et si on remplie l'espace entre les armatures par un milieu diélectrique de permittivité relative ε_r, la nouvelle capacité devient
$\mathbf{C' = \varepsilon_r C}$, avec $\varepsilon_r > 1$. donc la **capacité a augmenté**.



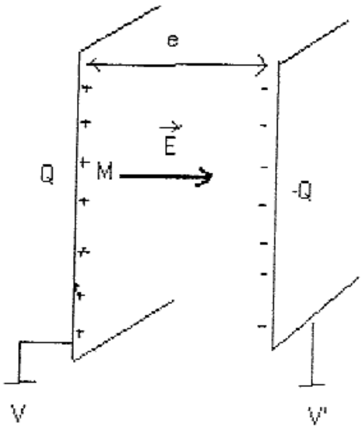
- Condensateur cylindrique.

E (M) = $Q/ 2\pi\varepsilon_o h\, r$, on en déduit $V - V' = \int_R^{R'} -dV = \int_R^{R'} E.dr = Q/ 2\pi\varepsilon_o\, h \int_R^{R'} dr / r$
$= Q/ 2\pi\varepsilon_o\, h \ln R'/R$, soit $\mathbf{C = 2\pi\varepsilon_o\, h / \ln R'/R}$
Mêmes remarques que précédemment.



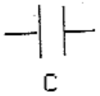
- Condensateur plan.

$V - V' = \int E.dl = E(M) . e = \sigma e/\varepsilon_o = Q / \varepsilon_o$ Soit $\mathbf{C = \varepsilon_o S / e}$



UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES DHAR MAHRAZ FES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
Prs: ECH-CHAOUI . M / MEKNASSI.F

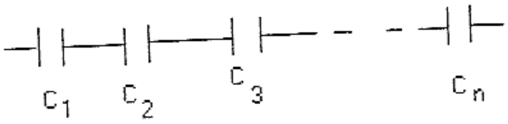
3) Association des condensateurs.

On symbolise un condensateur par 

.

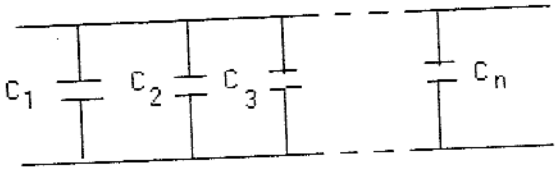
- En Série

$$1 / C = \sum_{i=1}^{n} 1/ C_i$$



- En parallèle.

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i$$



4) Energie emmagasinée d'un condensateur

Le processus de charge d'un condensateur, va nous servir à calculer l'énergie emmagasinée. Pour charger un condensateur, on prélève successivement des charges dq sur l'une des armatures, par exemple (2), et on les amène sur l'autre armature (1). Si à un instant donné la différence de potentiel entre les armatures est U, l'énergie potentielle de dq s'accroît de U.dq. D'où l'énergie totale emmagasinée par le condensateur de charge Q , capacité C et d.d.p $(V_1 - V_2)$:

$$W = \int_2^1 U.dq = \int_2^1 CU.dU = 1/2\ C\ (V_1 - V_2)^2 = ½\ Q.\ (V_1 - V_2) = 1/2\ Q^2/C$$

Remarque : Dans le cas d'un seul conducteur isolé, il suffit de remplacer $(V_1 - V_2)$ par V.

5) Relation entre force et énergie électrostatique.

En tout point M d'un conducteur chrgé en équilibre, la résultante des forces est liée à l'énergie électrostatique W du système de conducteurs par :

$F = -[\text{grad } W]_{Qi=cte}$, à charges constantes (conducteurs isolés)

$F = +[\text{grad } W]_{Vi=cte}$, à potentiels constantes (grâce aux générateurs)

a) Si Q est la variable indépendante :

$dW = -F.dr$, et $F_x = -\partial W(Q)/\partial x$, $F_y = -\partial W(Q)/\partial y$, et $F_z = -\partial W(Q)/\partial z$

b) Si V= cte, $dW = F.dr$, et $F_x = \partial W(V)/\partial x$, $F_y = \partial W(V)/\partial y$, et $F_z = \partial W(V)/\partial z$

Dans le cas d'un condensateur de charge Q, de capacité C, et de ddp ($V_1 - V_2$)= V, le système de forces agissant sur le condensateur est :

A **V = cte** , $W = ½ C V^2$, et $F_x = 1/2\ V^2 \partial C/\partial x$, $F_y = 1/2\ V^2 \partial C/\partial y$, et $F_z = 1/2\ V^2 \partial C/\partial z$
A **Q = cte**, $W = 1/2\ Q^2/C$, et $F_x = -1/2\ Q^2 \partial/\partial x\ (1/C)$, $F_y = -1/2\ Q^2 \partial/\partial y\ (1/C)$,
et $F_z = -1/2\ Q^2 \partial/\partial z\ (1/C)$.

(SMP/SMC/SMA/SMI)

ELECTROCINETIQUE

Dans ce chapitre, nous étudierons les propriétés des charges électriques en mouvement, ayant une vitesse non nulle, en régime permanent (courant continu).

I) Le courant électrique.

1) Définitions.

a) Notion du courant.

Soient deux conducteurs A et B , chargés et isolés, qui sont portés à des potentiels V_A et V_B, avec $V_A > V_B$. Relions A et B par un fil conducteur. L'ensemble A+B+ fil constituent un seul conducteur qui tend vers l'équilibre et qui sera caractérisé par $V_A = V_B$. Il y a donc transfert de charges d'un conducteur à l'autre à travers le fil.
Ce déplacement de charges est appelé ' **courant électrique** ', c'est un courant transitoire, il ne dure que le temps necessaire à l'égalisation des potentiels.

Il existe des appareils capables de maintenir une ddp entre les deux conducteurs A et B reliés pa r le fil, c'est le cas des générateurs. Ce déséquilibre 'permanent entre A et b entraîne un écoulement permanent de charges à travers le fil . Cet écoulement est appelé ' **Courant continu'** (==) , ou on dit qu'on a un **régime permanent.**

b) Intensité du courant électrique **I**.

C'est la quantité d'électricité qui passe par unité de temps à travers une section donnée du circuit. Cette intensité **I = Q/t** est constante le long d'un circuit électrique, en régime permanent.

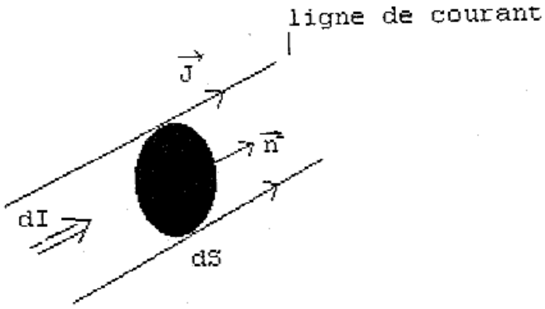
UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH **Prs: ECH-CHAOUI . M / MEKNASSI.F**
FACULTE DES SCIENCES DHAR MAHRAZ FES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Dans le cas **d'un régime lentement variable avec le temps**, on peut écrire **I = dQ / dt (Ampère).**

c) Densité de courant **J**

Soit un conducteur parcouru par une intensité I, soit un élément de surface dS du conducteur. On définit la densité de courant par **J = dI / dS (A/m^2),** avec dI est l'intensité de courant traversant dS. En électricité, on parlera du **vecteur densité de courant J = dI / dS n.**

Ce vecteur est porté par une ligne de courant, et qui est **tangent** en chaque point appartenant à cette ligne.



Ce vecteur J peut être exprimé par : **J = Nqv,** avec **N** : c'est le nombre de charges mobiles par unité de volume, et **v** c'est la vitesse de charges mobiles (libres), et qui est **constante** en régime permanent.

- propriété de J.

Soit un tube de courant, qui est un ensemble de lignes de courant limité par une courbe fermée. Supposons que ce tube s'appuie sur deux surfaces élémentaires dS et dS' d'un conducteur. Dans ce cas, les intensités de courant traversant les deux surfaces sont successivement dI = J.dS et dI = J.dS', or en régime permanent dI est constante, d'où le flux du vecteur J à travers le tube :

$\Phi = \oiint_S J.dS = 0$, on dit que le vecteur densité de courant J est à flux conservatif. Soit avec le théorème de Green on peut écrire **divJ = 0.**

2) **Loi d'Ohm.**

a) Définition.

Soit un conducteur métallique. Les électrons mobiles (libres) responsable de la conductivité sont soumises à un système de forces :

- la force électrique $\mathbf{F_e = q\ E = -e\ E}$, avec (q = -e)
- la force de frottement ou mécanique : $\mathbf{F_m = -\lambda\ v}$ (λ est constante de frottement), et v la vitesse des électrons. A l'équilibre, en régime permanent, on a :

$F_e + F_m = 0$, d'où $v = -e / \lambda\ E$, soit avec $J = Nqv = -Ne^2/ \lambda\ E = \gamma\ E$, avec $\boldsymbol{\gamma = Ne^2 / \lambda}$ est la **conductivité** du conducteur et caractérise chaque conducteur, elle s'exprime en $\Omega^{-1}.\ m^{-1}$

$\mathbf{J = \gamma\ E}$ est la **loi d'Ohm généralisée** (locale)

b) Résistance d'un conducteur.

Soit une section droite dS, qui est normale aux lignes de courant. Soient deux points a et b infiniment voisins d'une ligne de courant de distance dl. Soient V_a et V_b les potentiels en a et b. On a la d.d.p entre a et b est $V_a - V_b = E.dl = (1/\gamma)\,(dl/dS)\,dI$, avec $dI = J\,dS = \gamma E.dS$

Soit $V_A - V_B = \int_A^B (1/\gamma)\,(dl/dS)\,dl = dI \int_A^B (1/\gamma)\,(dl/dS) = dI\,.\,r$, avec $r = \int_A^B (1/\gamma)\,(dl/dS)$

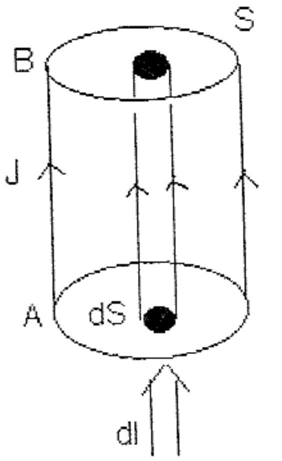
est la **résistance** du tube élémentaire de courant de section dS, traversé par l'intensité de courant dI. (dI est la même en régime permanent).

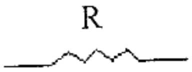
$dI = V_A - V_B / r$, d'où l'intensité de courant totale traversant toute la section finie S est :

$$I = \iint_S dI = \iint_S V_A - V_B / r = V_A - V_B \iint_S 1/r$$

On pose $R = 1 / \iint_S 1/r$, avec $V_A - V_B = R\,I$, soit $\boxed{\mathbf{R = 1 / \iint_S 1 / \int_A^B (1/\gamma)\,(dl/dS)}}$

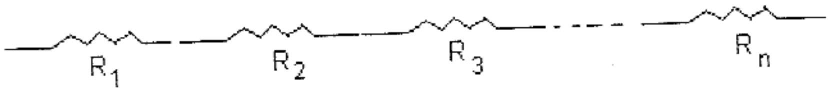
R (Ω), est la résistance totale du conducteur de section S et traversé par une intensité de courant I, et de conductivité γ. ($\rho = 1/\gamma$,est la résistivité d'un conducteur, d'unité (Ω. M))



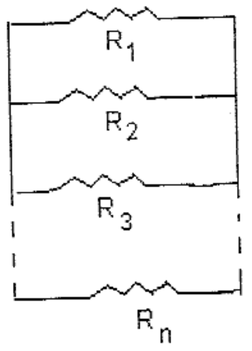
On symbolise une résistance par : 

- <u>Associations des résistances</u>.

-En série : $R = \sum_{i=1}^{n} R_i$



- En parallèle. $1/R = \sum_{i=1}^{n} 1/R_i$



3) **Loi de Joule.**

Soit un électron animé d'une vitesse V, en régime permanent (v = cte). Le travail de la force électrique est opposé à celui de la force mécanique (frottement) :

$dW_e = F_e .dl = -e E.dl = e.\text{grad } V.dl = e.dV$

$dW_m = -\lambda\, v .dl = -\lambda\, v^2\, dt$

A l'équilibre on a : $edV = \lambda v^2\, dt = dW$, d'où on définit la puissance dissipée par effet Joule par :

$P = N\, dW / dt = N \lambda\, v^2$, avec $v = e/\lambda\ \ E$ et $\gamma = Ne^2/\lambda$, on peut exprimer la loi de Joule généralisée par :

$$P = \gamma\, E^2 = 1/\gamma\, J^2$$

Pour un volume élémentaire dv de section dS d'un tube de courant de longueur dl ; la puissance dissipée sera :

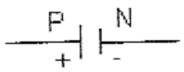
$$dP = \int_A^B (1/\gamma)\,(dl/dS)\,(dI)^2 = (dI)^2 \int_A^B (1/\gamma)\,(dl/dS) = (dI)^2.r$$

Pour une section totale d'un conducteur traversé par une intensité de courant I et de résistance totale R, on a $P = R\, I^2$, d'où l'énergie dissipée pendant le temps dt est $\mathbf{dW = P\, dt}$.

II) Etude d'un générateur.

1) Définition : d.d.p entre les bornes d'un générateur.

Un générateur **idéal** est schématisé par :



$V_P > V_N$

Soit un générateur G en circuit fermé, on étudiera les déplacements des charges à l'extérieur et à l'intérieur du G.

a) Extérieur du G.

Dans la partie PMN les charges + se déplacent dans le sens des potentiels décroissants : ce mouvement est dû à l'action d'un champ du type électrostatique $\mathbf{E_s}$.

b) Intérieur du G

Les cherges + circulent dans le sens des potentiels croissants. Ceci est dû à un autre type de champ, caractéristique de générateur, appelé ''champ électromoteur ' noté $\mathbf{E_m}$.

dans ces conditions, la loi d'Ohm appliquée au générateur sera : $J = \gamma E_T = \gamma (E_s + E_m)$, où E_T est le champ total agissant sur un électron en régime permanent.

Calculons la circulation de E_T le long d'un tube de courant élémentaire allant de N vers P, de section dS et de longueur dl.

$$\int_N^P \mathbf{E_T.dl} = \int_N^P \mathbf{E_S.dl} + \int_N^P \mathbf{E_m.dl} = \int_N^P \mathbf{(1/\gamma)\,(dI / dS).dl} = \mathbf{dI} \int_N^P \mathbf{(1/\gamma)\,(dl / dS)}$$

avec, $dI \int_N^P (1/\gamma)\,(dl / dS) = \mathbf{dI.r}$ (r est la résistance élementaire)

$\int_N^P E_S.dl = V_N - V_P$, et $\int_N^P E_m.dl =$ **e** (force électromotrice du G, (f.é.m) en volts)

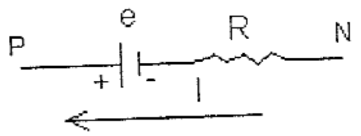
Soit $V_N - V_P + e = dI\,.r$, d'où $dI = 1 / r\,[\,e + (V_N - V_P)\,]$, donc l'intensité de courant totale traversant le générateur sera :

$$I = \sum dI = [\,e + (V_N - V_P)\,].\sum 1 / r$$

avec $1 / R = \sum 1 / r$, où R est la résistance totale vue entre N et P,appelée **résistance interne** de G

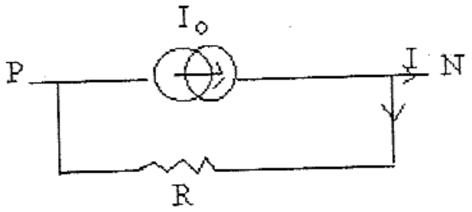
Soit , en général, un générateur G (e, R) de f.é.m e et de résistance interne e, parcourru par un courant I, on définit la d.d.p entre les bornes de G par :

$$\mathbf{V_P - V_N = e - R\,I}$$



Ce type de générateur est un générateur **linéaire de tension** , par comparaison avec un générateur idéal, ce dernier a une résistance interne nulle. Il existe un générateur de **courant** , de courant principal **Io** et de résistance interne **R** , qui peut être schématisé par :

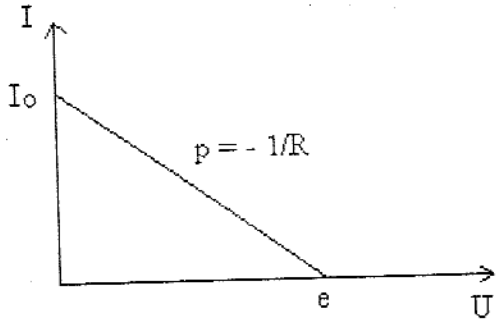
On a **$I = I_o - (V_P - V_N) / R$** (I_o est appelé courant principal ou courant électromoteur)



- Caractéristiques d'un générateur.

C'est la variation de l'intensité qui traverse la générateur en fonction de la d.d.p entre ses bornes : **I= f (U)**

$e = U(I = 0)$= f.é.m en circuit ouvert, et $I_o = I (U=0)$ le courant en court-circuit



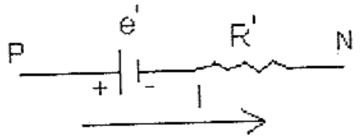
3) Puissance fournie par un générateur

Le travail effectué par le générateur est celuyi de la force associée au champ électromoteur E_m : soit $W = \int_N^P q\, E_m.\, dl = q \int_N^P E_m.\, dl = q.e$

Si le générateur est traversé par une charge totale dQ pendant un instant dt, il fournit un travail dW = dQ.e = I.di.e, d'où la puissance fournie par le générateur est $P = dW/ dt = I.e$ c'est un effet Joule.

III) Etude d'un Récepteur.

Un récepteur est un appareil qui consomme de l'énergie électrique et la transforme sous une autre forme. Par exemple un moteur électrique (Wélectrique -------- W mécanique).
soit un récepteur de **résistance interne R'** et de **force contre électromotrice e' (f.c.é.m)**, traversé par un courant I, la d.d.p entre ses bornes sera : **$V_P - V_N = e' + R' I$,** et la puissance consommée sera **P' = e'.I**



IV)Loi d'Ohm et de Pouillet.

Soit un circuit fermé comportant des générateurs de f.é.m e_i et des résistances internes R_i, des récepteurs de f.c.é.m e'i et des résistances internes R'_i et des résistances mortes r_i. Ce circuit est alimenté par un courant I. Dans ces conditions on peut écrire :

$$\sum e_i - \sum e'_i = [\sum r_i + \sum R_i + \sum R'_i] . I$$

Cas où on a qu'un générateur G(e , R) et des résistances mortes r_i :

$$e = (\sum r_i + R).I$$ **' Loi de Poiullet'**

V) Réseaux électriques : Lois de KIRCHOFF

1) Définitions.

Réseau : On appelle réseau électrique un ensemble de générateurs, récepteurs et résistances mortes associés de façon quelconque et , formant donc un ensemble de circuits fermés et interconnectés.

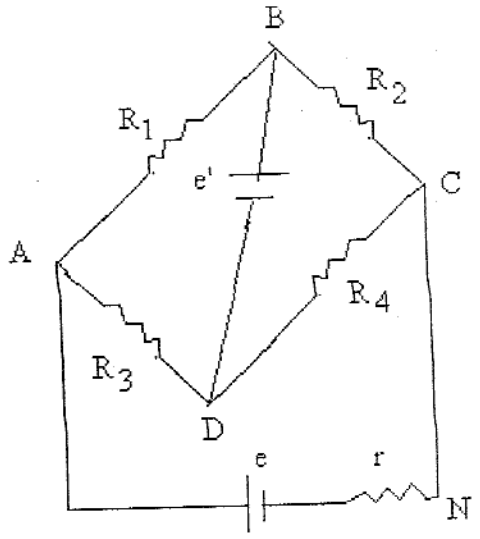
Nœud : est un point de réseau auquel aboutissent **au moins 3** conducteurs.

Branche : Est une portion linéaire du circuit comprise **entre 2 nœuds**.

Maille : Un ensemble **d'au moins deux branches** formant une boucle fermée.

Exemple.

Il y a : **4 nœuds** A, B, C et D et **6 branches** : AB, BC, BD, CD, AD et AC
7 mailles : 3 indépendantes (ABDA, BDCB et ADCNA) et 4 dépendantes

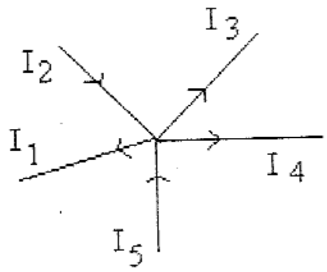


2) Lois de Kirchoff.

a) **Loi des nœuds.**

La somme des courants qui convergent vers un nœud est égale à la somme des courants qui divergent du même nœud. $\sum$ I entrants = $\sum$ I sortants

Exemple : $I_2 + I_5 = I_1 + I_3 + I_4$



b) Loi des mailles.

- Méthode : Choisir un sens du courant arbitraire dans chaque branche ou maille,
  Choisir un sens de parcours positif dans la maille,
  Appliquer la loi de Pouillet, $\sum$ **R I** = $\sum$ **e**

Les **RI** sont affectés du signe +, si le sens du courant coincide avec celui + choisie dans la maille, dans le cas contraire on écrit (– RI.).

Les f.é.m et f.c.é.m seront affectées du signe **de la borne par laquelle** on **sort** du générateur ou récepteur, lorsqu'on suit le sens +.

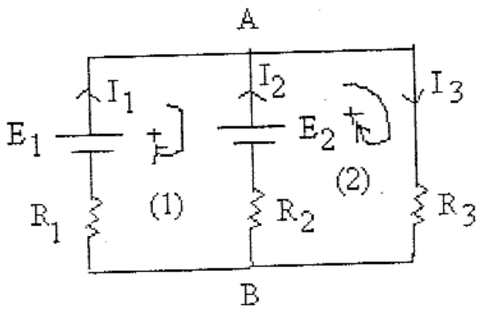
3) Détermination des courants dans un circuit.

Soit un réseau contenant **n** nœuds et **b** branches. Nous nous proposons de déterminer les intensités de courant qui parcourent ces b branches, soit b inconnues, dans ce cas on écrit :

(n-1) équations aux nœuds et b- (n -1) équations aux mailles.

On obtient ainsi, un système de b équations à b inconnues à résoudre.

exemple :



on a n = 2 et b = 3, donc :

une équation aux nœuds : $I_3 = I_1 + I_2$

deux équations aux mailles : (1)...... $+R_1 I_1 - R_2 I_2 = +e_1 - e_2$
(2).........$R_2 I_2 + R_3 I_3 = +e_2$

Soit :
$$\begin{aligned} \mathbf{I_1} &+ \mathbf{I_2} - \mathbf{I_3} = 0 \\ +R_1 \mathbf{I_1} &- R_2 \mathbf{I_2} + 0 = +e_1 - e_2 \\ 0 &+ R_2 \mathbf{I_2} + R_3 \mathbf{I_3} = +e_2 \end{aligned}$$

La résolution de ce système d'équations (directement ou par matrice) donne les valeurs des intensités du courant **algébriquement**.

Si le courant I_k circulant dans la branche k est négatif, deux cas se présentent :

-Si la branche ne contient pas de récepteurs, le sens réel du courant est l'inverse du sens choisi.

-Si la branche contient des récepteurs, il faut rétablir le sens réeel du courant dans la branche et une nouvelle équation est donc nécessaire pour trouver la valeur réelle du courant.

4) Transformations triangles--------- étoiles (Théorème de KENELLY)

C'est une méthode qui permet transformer un circuit compliqué vers un circuit simple à étudier.

UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH **Prs: ECH-CHAOUI . M / MEKNASSI.F**
FACULTE DES SCIENCES DHAR MAHRAZ FES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

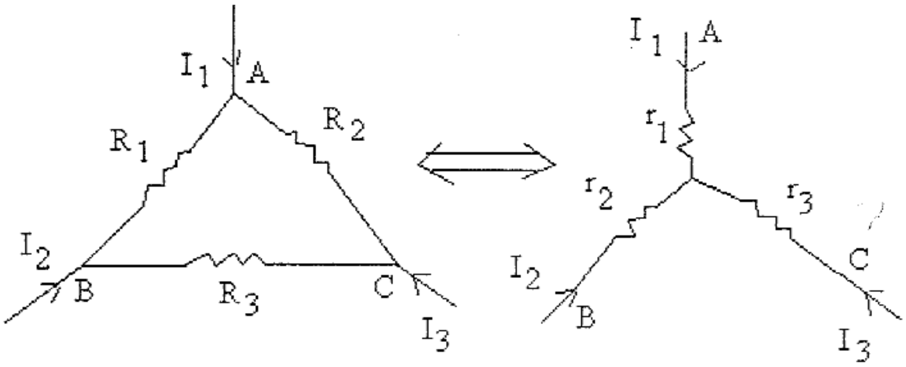
Soit un **triangle** ABC formé par des résistances $\mathbf{R_1, R_2}$ **et** $\mathbf{R_3}$, et soit une **étoile** ABC formée par des résistances $\mathbf{r_1, r_2}$ **et** $\mathbf{r_3}$. On veut transformer soit un triangle en étoile (r = f(R))ou étoile en triangle (R = f(r)) :

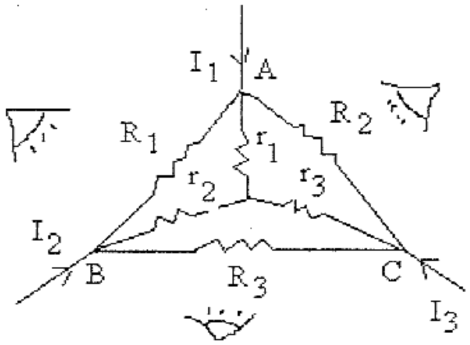
Pour que les deux réseaux soient équivalents, on place l'étoile à l'intérieur du triangle, et place un observateur de chaque côté du système et on en déduit :

$r_1 + r_2 = R_1 // (R_2 + R_3) = R_1 (R_2 + R_3) / (R_1 + R_2 + R_3)$ (1)

$r_1 + r_3 = R_2 // (R_1 + R_3) = R_2 (R_1 + R_3) / (R_1 + R_2 + R_3)$ (2)

$r_3 + r_2 = R_3 // (R_2 + R_1) = R_3 (R_2 + R_1) / (R_1 + R_2 + R_3)$ (3)





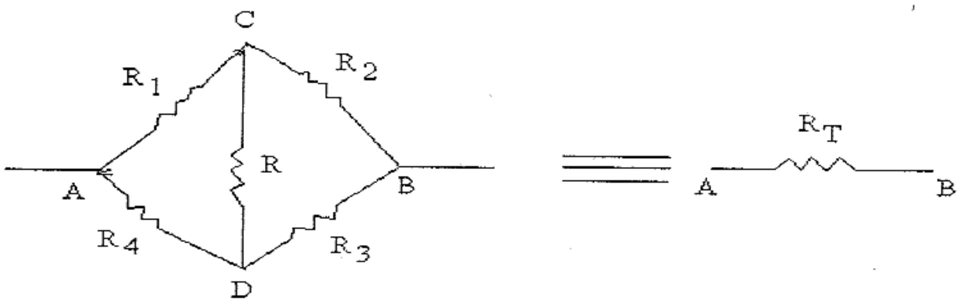
De (1) , (2) et (3) on en déduit :

$$\mathbf{r_1 = R_1 .R_2 / (R_1 + R_2 +R_3)}$$
$$\mathbf{r_2 = R_1 .R_3 / (R_1 + R_2 +R_3)}$$
$$\mathbf{r_3 = R_3 .R_2 / (R_1 + R_2 +R_3)}$$

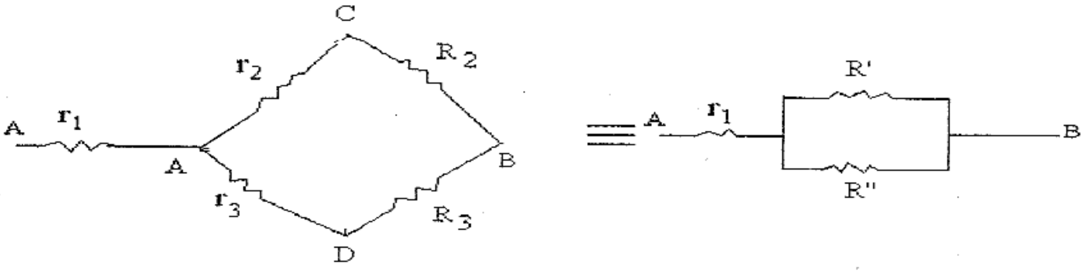
$$\mathbf{R_1 = (1 / r_3). (r_1.r_2 + r_3.r_2 + r_1.r_3),}$$
$$\mathbf{R_2 = (1 / r_2). (r_1.r_2 + r_3.r_2 + r_1.r_3)}$$
$$\mathbf{R_3 = (1 / r_1). (r_1.r_2 + r_3.r_2 + r_1.r_3)}$$

Exemple :

calculer la résistance $\mathbf{R_T}$ équivalente entre A et B :



transformons le triangle ACD en étoile :



avec $R' = r_2 + R_2$ et $R'' = r_3 + R_3$, d'où $\mathbf{R_T = r_1 + (R' // R'') = r_1 + R'.R''/ (R'+ R'')}$

avec $r_1 = R1 .R4 / (R1 + R4 + R)$

$r_2 = R1 .R / (R1 + R4 + R)$

$r_3 = R .R4 / (R1 + R4 + R)$

5) Théorème de THEVENIN.

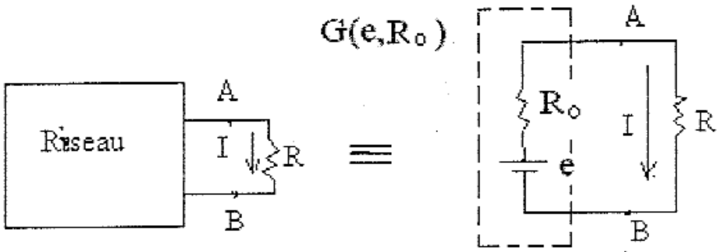
Ce théorème est surtout intéressant lorsqu'on veut calculer une seule intensité dans une branche d'un réseau.

Enoncé :

Un réseau est pris entre deux nœuds A et B d'un réseau est équivalent à un générateur de tension de f.é.m e et de résistance interne $\mathbf{R_0}$.

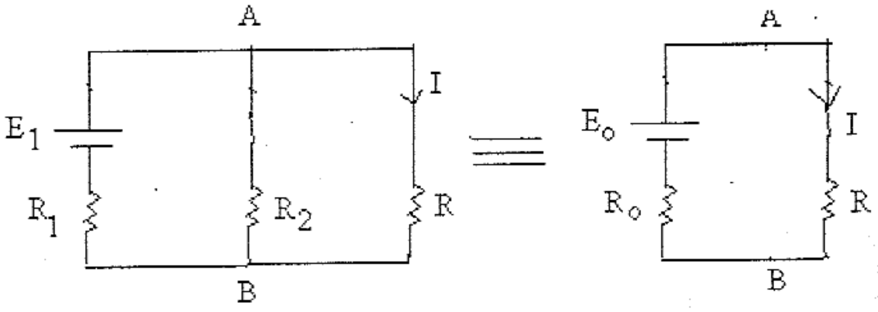
-Pour calculer R_0, on court-circuite toutes les sources (générateur ou récepteur) en gardant leurs résistances internes, et on calcule la résistance équivalente vue entre A et B.

-Pour calculer e, on calcule la d.d.p entre A et B en circuit ouvert (sans la branche AB), $e = (V_A - V_B)_{c.o}$, on en déduit $\mathbf{I} = e / (R + R_o)$



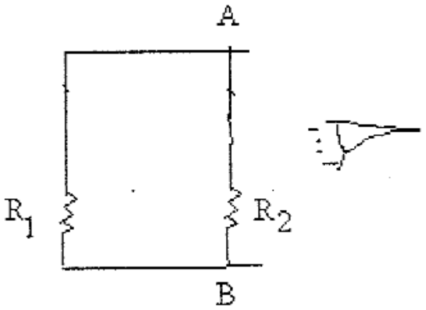
Exemple :

Calculer l'intensité de courant I qui traverse R.



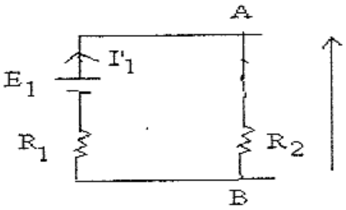
$I = E_0 / (R + R_0)$

R_0 ?



$\Rightarrow$ $R_0 = R_1 // R_2 = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

E_0 ?



$E_0 = V_A - V_B = R_2 I'_1 = R_2 \dfrac{E_1}{R_1 + R_2}$

UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH **Prs: ECH-CHAOUI . M / MEKNASSI.F**
FACULTE DES SCIENCES DHAR MAHRAZ FES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

6) Théorème de **NORTON**.

Ce théorème est surtout intéressant lorsqu'on veut calculer une seule intensité dans une branche d'un réseau.

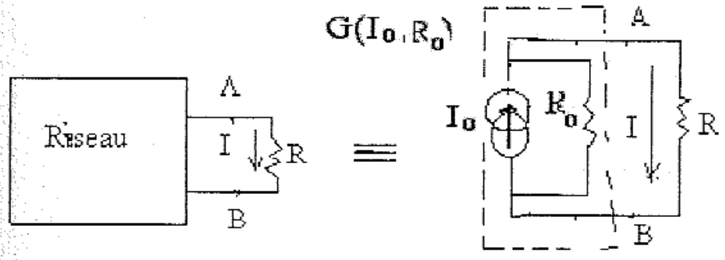
Enoncé :

Un réseau est pris entre deux nœuds A et B d'un réseau est équivalent à un générateur de courant de courant principal I_0 (courant en court circuit I_{cc}), et de résistance interne $\mathbf{R_0}$, montée en parallèle.

-Pour calculer R_0, on court-circuite toutes les sources (générateur ou récepteur) en gardant leurs résistances internes, et on calcule la résistance équivalente vue entre A et B.

-Pour calculer I_0, on court circuite la branche entre A et B , et on calcule le courant qui circule dans le circuit.

On a $\mathbf{I = I_0 - (V_A - V_B) / R_0}$ (I_0 est appelé courant principal ou courant électromoteur)

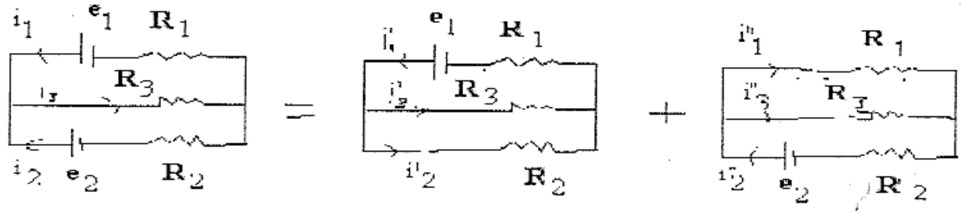


7) Théorème de **superposition**.

Les lois de kirchoff sont linéaires par rapport aux courants et aux f.é.m, ce qui entraîne le théorème suivant :

Le courant produit, dans une branche quelconque du réseau, par un ensemble de générateurs, est la somme algébriques des courants produits dans cette branche par chacun d'eux, supposé seul connecté, les autres étant remplacés par leurs résistances internes.

L'intensité résultante dans la branche i sera donc la somme de toutes les intensités partielles qui passent dans cette branche.



$$\mathbf{i_1 = i'_1 - i''_1 ,\quad i_2 = i''_2 - i'_2 \text{ et } i_3 = i'_3 + i''_3}$$